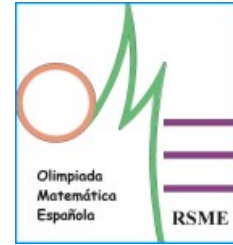




FASE LOCAL DE LA XLIV OME



PRIMERA SESIÓN

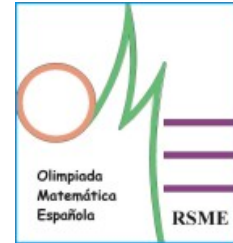
Mañana del sábado 19 de enero de 2008

1. Sea m un entero positivo. Demuestra que no existen números primos de la forma $2^{5m} + 2^m + 1$.
2. Un cuadrilátero convexo tiene la propiedad que cada una de sus dos diagonales biseca su área. Demuestra que este cuadrilátero es un paralelogramo.
3. Se consideran 17 enteros positivos tales que ninguno de ellos tiene un factor primo mayor que 7. Demuestra que hay al menos una pareja de estos números cuyo producto es un cuadrado perfecto.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se califica sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de tres horas y media.



FASE LOCAL DE LA XLIV OME



SEGUNDA SESIÓN

Tarde del sábado 19 de enero de 2008

4. Determina el triángulo de menor perímetro entre todos los que tienen la circunferencia inscrita con el mismo radio y el mismo valor de un ángulo.

5. Un club tiene 25 miembros. Cada comité está formado por 5 miembros. Dos comités cualesquiera tienen como mucho un miembro en común. Prueba que el número de comités no puede ser superior a 30.

6. Halla todas las ternas (x, y, z) de números reales que son solución de la ecuación

$$\sqrt{3^x(5^y + 7^z)} + \sqrt{5^y(7^z + 3^x)} + \sqrt{7^z(3^x + 5^y)} = \sqrt{2}(3^x + 5^y + 7^z).$$

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se califica sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de tres horas y media.