FASE LOCAL DE LA XLIV OME
SESIONES PRIMERA Y SEGUNDA
19 DE ENERO DE 2008 (MAÑANA Y TARDE)

1. Sea m un entero positivo. Demuestra que no existen números primos de la forma $2^{5m}+2^m+1$.

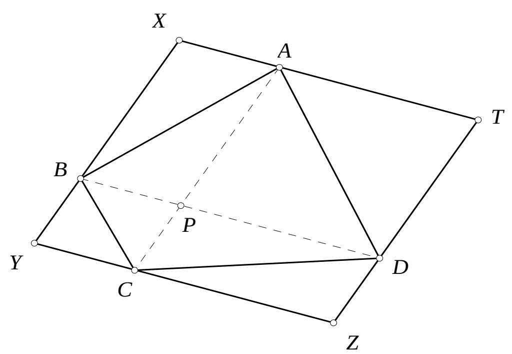
SOLUCIÓN:

Sumando y restando 2^{2m} resulta,
$2^{5m}+2^m+1 = 2^{5m}+2^m+1-2^{2m}+2^{2m} = 2^{2m}(2^{3m}-1)+2^{2m}+2^m+1.$
Teniendo en cuenta que $2^{3m}-1=(2^m-1)(2^{2m}+2^m+1),$ resulta que,

$2^{5m}+2^m+1=(2^{3m}-2^{2m}+1)(2^{2m}+2^m+1),$ que es compuesto porque cada uno de los dos factores es un entero positivo mayor que 1

2. Un cuadrilátero convexo tiene la propiedad que cada una de sus dos diagonales biseca su área. Demuestra que este cuadrilátero es un paralelogramo.

SOLUCIÓN:



Sea *ABCD* el cuadrilátero dado. Es sabido que al trazar paralelas a cada diagonal por los extremos de la otra se forma un paralelogramo (*XYZT* en la figura) de área doble de la del cuadrilátero de partida.
Si *AC* biseca a *ABCD* también biseca a *XYZT*, pero siendo *XYZT* un paralelogramo y *AC* paralela a los lados *XY* y *TZ* ; *P* es medio de *BD*.
De modo análogo se prueba que *P* es punto medio de *AC* y entonces los triángulos *APD* y *BPC* son iguales (dos lados iguales y el ángulo comprendido) y también *APB* y *CPD*.
En consecuencia el cuadrilátero inicial tiene iguales los lados opuestos y es un paralelogramo.

3. Se consideran 17 enteros positivos tales que ninguno de ellos tiene un factor primo mayor que 7. Demuestra que, al menos, el producto de dos de estos números es un cuadrado perfecto.

SOLUCIÓN:
Todos estos 17 números se pueden descomponer en factores primos de la forma $2^a 3^b 5^c 7^d$, donde sus exponentes a,b,c,d son enteros no negativos.
Si dos números de este tipo, es decir $2^a 3^b 5^c 7^d$ y $2^{a'} 3^{b'} 5^{c'} 7^{d'}$ se multiplican, su producto es $2^{a+a'} 3^{b+b'} 5^{c+c'} 7^{d+d'}$ y si los cuatro exponentes $a+a', b+b', c+c'$ y $d+d'$ son pares este producto es un cuadrado perfecto.
Para que esto ocurra las dos cuaternas (a,b,c,d) y (a',b',c',d') deben tener igual paridad, es decir a y a', b y b', c y c', d y d' deben tener respectivamente la misma paridad. Como cada uno de los cuatro números a,b,c,d puede ser par o impar hay un total de 16 cuaternas con distinta paridad entre sí. Al tener 17 números y, por tanto, 17 cuaternas, por el principio del palomar, dos deben tener igual paridad y entonces su producto es un cuadrado perfecto.

4. Determina el triángulo de menor perímetro entre todos los que tienen la circunferencia inscrita con el mismo radio y el mismo valor de un ángulo.

SOLUCIÓN:
Sean ABC todos los triángulos con esta propiedad; es decir que el ángulo común con el mismo valor es A y el radio inscrito también común es r.
Entonces el perímetro
$$2p = a+b+c =$$
$$r\left(\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right)+r\left(\cot\frac{C}{2}+\cot\frac{A}{2}\right)+r\left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}\right)=2r\left(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}\right).$$

Como A y r son fijos el perímetro será mínimo cuando sea mínima la expresión siguiente:
$$cot\frac{B}{2}+cot\frac{C}{2} = \frac{sen((B+C)/2)}{sen B/2\ sen C/2} = \frac{\cos A/2}{sen B/2\ sen C/2},\ \text{pues } A+B+C=180^\circ.$$
Y entonces $sen B/2\ sen C/2 = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2}-\cos\frac{B+C}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2}-\cos\frac{A}{2}\right)$

debe ser máximo, lo que conduce a que $\cos\frac{B-C}{2}$ sea 1 y entonces $B=C$.
Así los triángulos de perímetro mínimo con el ángulo A fijo y el radio inscrito fijo son los triángulos isósceles con $B=C=\frac{180^\circ-A}{2}$.

5. Un club tiene 25 miembros. Cada comité está formado por 5 miembros. Dos comités cualesquiera tienen como mucho un miembro en común. Prueba que el número de comités no puede ser superior a 30.

SOLUCIÓN:
Supongamos que haya 31 comités. Entonces hay, al menos, $31\times 5=155$ asientos en estos 31 comités. Como sólo hay 25 miembros, al menos, uno de ellos tendrá que

ocupar, al menos, 7 de los 155 asientos. Consideremos este miembro A y 7 de los comités donde se sienta. Hay, al menos, otros 28 asientos en estos 7 comités. Pero como sólo hay 24 miembros más, al menos, uno de ellos tendrá que ocupar, al menos, 2 de esos asientos. Sin embargo, este miembro y A deberán estar juntos en, al menos, 2 comités, lo que contradice las condiciones del enunciado.

6. Halla todas las ternas (x, y, z) de números reales que son solución de la ecuación

$$\sqrt{3^x(5^y+7^z)}+\sqrt{5^y(7^z+3^x)}+\sqrt{7^z(3^x+5^y)}=\sqrt{2}\left(3^x+5^y+7^z\right).$$

SOLUCIÓN:

Poniendo $a=3^x, b=5^y$ y $c=7^z$ la ecuación anterior se convierte en:

$$\sqrt{a(b+c)}+\sqrt{b(c+a)}+\sqrt{c(a+b)}=\sqrt{2}(a+b+c).$$

Aplicando la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica resulta:

$$\sqrt{a(b+c)}\le\sqrt{2}\left(\frac{a}{2}+\frac{b+c}{4}\right)$$
$$\sqrt{b(c+a)}\le\sqrt{2}\left(\frac{b}{2}+\frac{c+a}{4}\right)$$
$$\sqrt{c(a+b)}\le\sqrt{2}\left(\frac{c}{2}+\frac{a+b}{4}\right)$$

Sumando las desigualdades anteriores se obtiene

$$\sqrt{a(b+c)}+\sqrt{b(c+a)}+\sqrt{c(a+b)}\le\sqrt{2}(a+b+c).$$

La igualdad tiene lugar cuando $a=b=c.$ Por tanto, las soluciones buscadas son aquellas para las que $3^x=5^y=7^z$, lo que equivale a que $x\ln 3=y\ln 5=z\ln 7.$

Es decir las soluciones de la ecuación dada son:

$$x=\frac{1}{\ln 3}t,\ y=\frac{1}{\ln 5}t,\ z=\frac{1}{\ln 7}t,\quad t\in R.$$

(Se observa que en general $p^{\frac{1}{\ln p}}=e^{\left(\frac{1}{\ln p}\right)\ln p}=e,$ con $p>0$ y $p\neq 1$ y $a=b=c=e^t$).