FASE LOCAL DE LA XLIV OME

PRIMERA SESIÓN

Tarde del viernes 18 de enero de 2008

1. Demuestra que no existen enteros *a*, *b*, *c*, *d* tales que el polinomio $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0),$ cumpla que $P(4) = 1$ y $P(7) = 2.$
.

2. En el triángulo *ABC*, el área *S* y el ángulo *C* son conocidos. Halla el valor de los lados *a* y *b* para que el lado *c* sea lo más corto posible.

3. Determina todas las ternas de números reales $(a,b,c),$ que satisfacen el sistema de ecuaciones siguiente: $\begin{cases} a^5 = 5b^3 - 4c \\ b^5 = 5c^3 - 4a. \\ c^5 = 5a^3 - 4b \end{cases}$

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se califica sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de tres horas y media.

FASE LOCAL DE LA XLIV OME

SEGUNDA SESIÓN

Mañana del sábado19 de enero de 2008

4. ¿Qué número es mayor: $999!$ ó 500^{999}? Justifica la respuesta.

5. Sean D, E, F los puntos de tangencia del círculo inscrito al triángulo ABC con los lados BC, AC y AB respectivamente. Demuestra que

$$4S_{DEF} \leq S_{ABC}$$

donde S_{XYZ} denota el área del triángulo XYZ.

6. Las longitudes de los lados y de las diagonales de un cuadrilátero convexo plano $ABCD$ son racionales. Si las diagonales AC y BD se cortan en el punto O, demuestra que la longitud OA es también racional.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se califica sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de tres horas y media.