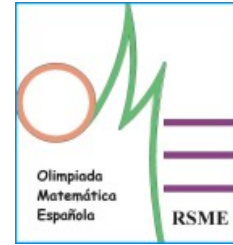




FASE LOCAL DE LA XLIV OME



PRIMERA SESIÓN

Tarde del viernes 18 de enero de 2008

1. Demuestra que no existen enteros a, b, c, d tales que el polinomio $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$), cumpla que $P(4) = 1$ y $P(7) = 2$.

.

2. En el triángulo ABC , el área S y el ángulo C son conocidos. Halla el valor de los lados a y b para que el lado c sea lo más corto posible.

3. Determina todas las ternas de números reales (a, b, c) , que satisfacen el sistema de

ecuaciones siguiente:
$$\begin{cases} a^5 = 5b^3 - 4c \\ b^5 = 5c^3 - 4a \\ c^5 = 5a^3 - 4b \end{cases}$$

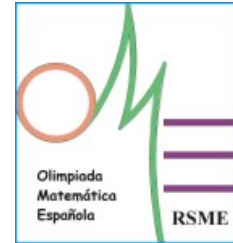
No está permitido el uso de calculadoras.

Cada problema se califica sobre 7 puntos.

El tiempo de cada sesión es de tres horas y media.



FASE LOCAL DE LA XLIV OME



SEGUNDA SESIÓN

Mañana del sábado 19 de enero de 2008

4. ¿Qué número es mayor: $999!$ ó 500^{999} ? Justifica la respuesta.
5. Sean D, E, F los puntos de tangencia del círculo inscrito al triángulo ABC con los lados BC, AC y AB respectivamente. Demuestra que
- $$4S_{DEF} \leq S_{ABC}$$
- donde S_{XYZ} denota el área del triángulo XYZ .
6. Las longitudes de los lados y de las diagonales de un cuadrilátero convexo plano $ABCD$ son racionales. Si las diagonales AC y BD se cortan en el punto O , demuestra que la longitud OA es también racional.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se califica sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de tres horas y media.