Fase Nacional de la XLV Olimpiada Matemática Española
Sant Feliu de Guixols (Girona), 27 de marzo de 2009

PRIMERA SESIÓN

1.- Halla todas las sucesiones finitas de n números naturales consecutivos $a_1, a_2, ..., a_n$, con $n \geq 3$, tales que $a_1 + a_2 + ... + a_n = 2009$.

2.- Sean ABC un triángulo acutángulo, I el centro del círculo inscrito en el triángulo ABC, r su radio y R el radio del círculo circunscrito al triángulo ABC. Se traza la altura $AD = h_a$, con D perteneciente al lado BC. Demuestra que

$$DI^2 = (2R - h_a)(h_a - 2r).$$

3.- Se pintan de rojo algunas de las aristas de un poliedro regular. Se dice que una coloración de este tipo es *buena*, si para cada vértice del poliedro, existe una arista que concurre en dicho vértice y no está pintada de rojo. Por otra parte, se dice que una coloración donde se pintan de rojo algunas de las aristas de un poliedro regular es *completamente buena*, si, además de ser *buena*, ninguna cara del poliedro tiene todas sus aristas pintadas de rojo. ¿Para qué poliedros regulares es igual el número máximo de aristas que se pueden pintar en una coloración *buena* y en una *completamente buena*? Justifica la respuesta.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema vale siete puntos.
El tiempo de cada sesión es de tres horas y media.

Fase Nacional de la XLV Olimpiada Matemática Española

Sant Feliu de Guixols (Girona), 28 de marzo de 2009

SEGUNDA SESIÓN

4.- Determina justificadamente todos los pares de números enteros (x, y) que verifican la ecuación $x^2 - y^4 = 2009$.

5.- Sean a, b, c números reales positivos tales que $abc = 1$. Prueba la desigualdad siguiente

$$\left(\frac{a}{1+ab}\right)^2 + \left(\frac{b}{1+bc}\right)^2 + \left(\frac{c}{1+ca}\right)^2 \geq \frac{3}{4}$$

6.- En el interior de una circunferencia de centro O y radio r, se toman dos puntos A y B, simétricos respecto de O. Se considera P un punto variable sobre esta circunferencia y se traza la cuerda PP', perpendicular a AP. Sea C el punto simétrico de B respecto de PP'. Halla el lugar geométrico del punto Q, intersección de PP' con AC, al variar P sobre la circunferencia.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema vale siete puntos.
El tiempo de cada sesión es de tres horas y media.