**XLV Olimpiada Matemática Española**

Primera Fase

**Primera y segunda sesión**

Sábado mañana, 24 de enero de 2008

SOLUCIONES

**1. y 4.** Probar que para todo entero positivo $n$, $n^{19} - n^7$ es divisible por 30.

Solución:

$n^{19} - n^7 = n^7(n^{12} - 1) = n^7(n^6 + 1)(n^6 - 1) = n^7(n^6 + 1)(n^3 + 1)(n^3 - 1)$, con lo que en la descomposición de $n^{19} - n^7$ aparecen tres números consecutivos, $n - 1$, $n$, $n + 1$, de los cuales al menos uno es divisible por 2 y exactamente uno es divisible por 3.

Completaremos la descomposición para probar que aparece un factor divisible por 5, y habremos terminado.

$$n^{19} - n^7 = n^7(n^2 + 1)(n^4 - n^2 + 1)(n + 1)(n^2 - n + 1)(n - 1)(n^2 + n + 1)$$

Si ninguno de los números $n - 1$, $n$, $n + 1$ es múltiplo de 5, entonces $n = 5k \pm 2$, con lo que $(n^2 + 1) = 25k^2 \pm 20k + 5$ es múltiplo de 5, como queríamos.

**2. y 5.** Determinar el mayor número de planos en el espacio tridimensional para los que existen seis puntos con las siguientes condiciones:

i) Cada plano contiene al menos cuatro de los puntos.

ii) Cuatro puntos cualesquiera no pertenecen a una misma recta.

Solución:

Sean $r$ y $s$ dos rectas que se cruzan en el espacio. Sean $A$, $B$ y $C$ tres puntos distintos de $r$ y sean $P$, $Q$ y $R$ tres puntos distintos en $s$. Cada uno de los puntos de $r$ define con $s$ un plano, y análogamente cada punto de $s$ con $r$. Estos 6 planos cumplen las condiciones del problema, por lo que el número buscado es mayor o igual que 6.

Probaremos que no es posible satisfacer las condiciones con más de 6 planos.

Comenzamos por ver que no puede haber tres puntos en una misma recta. En efecto, si suponemos que los puntos $H$, $J$, $K$ están sobre una recta $l$, ningunos de los restantes puntos, $L$, $M$, $N$, puede estar en $l$, por la condición b. Estos tres puntos $L$, $M$ y $N$, pertenecen como mucho a tres de los planos, por lo que los demás planos contienen al menos a 2 de los puntos de $l$, y por tanto a toda la recta. Es decir, al menos cuatro planos contienen a $l$, lo que es imposible, porque al menos uno de ellos no podría contener a ninguno de los puntos $L$, $M$ o $N$, contrario a la condición a.

Veremos ahora que ningún plano puede contener a más de cuatro de los puntos. Supongamos que uno de los planos contiene a cinco de los puntos y deja fuera al punto $X$. Como acabamos de ver que no puede haber tres puntos alineados, un plano que contenga a $X$ contendría como mucho a dos de los otros puntos, contrario a la condición a.

Resumiendo, cada uno de los planos contiene exactamente a cuatro de los seis puntos y no hay tres que estén en la misma recta.

Cada plano deja fuera un par de puntos y dos planos distintos dejan fuera a puntos distintos, de lo contrario habría tres puntos en ambos planos, y deberían estar alineados. Como seis puntos sólo se pueden agrupar en tres pares disjuntos de puntos, es imposible que existan más de seis planos en las condiciones del problema.

**3. y 6.** Los puntos de una retícula $m \times n$ pueden ser de color blanco o negro. Una retícula se dice que está equilibrada si para cualquier punto $P$ de ella, la fila y columna que pasan por este punto $P$ tienen ambas el mismo número de puntos de igual color que $P$. Determinar todos los pares de enteros positivos $(m, n)$ para los que existe una retícula equilibrada.

Solución:

Denotaremos por $BF(i)$ el número de puntos de color blanco que hay en la fila $i$ y con $BC(j)$ el número de puntos blancos en la columna $j$. Análogamente, $NF(i)$ y $NC(j)$ denotarán el número de puntos negros en la fila $i$ y en la columna $j$, respectivamente. Siendo $P_{ij}$ el punto que se encuentra en la fila $i$ y en la columna $j$, suponiendo que es de color blanco, la condición de ser equilibrada se leerá $BF(i) = BC(j)$.

Supongamos que el punto $P_{11}$ de una retícula equilibrada de $n$ filas y $m$ columnas es de color negro, y sea $k$ el número de puntos negros de la primera fila. Intercambiando las columnas, si fuere necesario, podemos suponer que estos puntos de color negro son los

$k$ primeros, $P_{11}$, …,$P_{1k}$. Por la condición de equilibrio para $P_{11}$, la primera columna también tendrá exactamente $k$ puntos de color negro que, reordenando las filas, si fuere necesario, supondremos que son los $k$ primeros puntos, $P_{11}$, …, $P_{k1}$.

Sea $P_{ij}$ , con $1 < i \leq k$ y $1 < j \leq k$. Supongamos que $P_{ij}$ es de color blanco. Se tendrá entonces que $BF(i) = BC(j)$. Pero por ser negro el punto $P_{1j}$, $NC(j) = NF(1) = k$, y por ser negro el punto $P_{i1}$, $NF(i) = NC(1) = k$. De donde,

$$n = BF(i) + NF(i) = BF(i) + k = BC(j) + k = BC(j) + NC(j) = m.$$

Suponiendo que, por ejemplo, $n > m$, tendremos que todos los puntos negros de las filas 1 a $k$ están en las primeras columnas, y análogamente todos los puntos negros de las columnas 1 a $k$ están en las primeras filas

$$
\begin{array}{rcc}
 & \overbrace{\begin{matrix}\phantom{\bullet} & \phantom{\cdots} & \phantom{\bullet}\end{matrix}}^{k} & \overbrace{\begin{matrix}\phantom{\circ} & \phantom{\cdots} & \phantom{\circ}\end{matrix}}^{n-k} \\
k\left\{\begin{matrix}\\ \\ \\ \end{matrix}\right. & \begin{matrix}\bullet & \cdots & \bullet \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bullet & \cdots & \bullet\end{matrix} & \begin{matrix}\circ & \cdots & \circ \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \cdots & \circ\end{matrix} \\
m-k\left\{\begin{matrix}\\ \\ \\ \end{matrix}\right. & \begin{matrix}\circ & \cdots & \circ \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \cdots & \circ\end{matrix} &
\end{array}
$$

Suponiendo que $m - k > 0$, todos los puntos $P_{ij}$, con $i > k$ y $j > k$, deben ser negros. En otro caso tendríamos un rectángulo con tres vértices de color blanco y uno negro, de donde se seguiría que $n = m$, como vimos al principio.

Por lo tanto, la condición para cualquiera de estos puntos nos dice que

$$n - k = NF(i) = NC(j) = m - k,$$

lo que contradice nuestra suposición de $n > m$. Por tanto, $m - k = 0$, lo que resulta en que $k = n - k$, por la condición para $P_{mn}$, de donde $n = 2m$.

Luego los posibles pares de números serán $(n, n)$, $(n, 2n)$ y $(2n, n)$, con $n$ un entero positivo.

**XLV Olimpiada Matemática Española**

Primera Fase

**Segunda sesión**

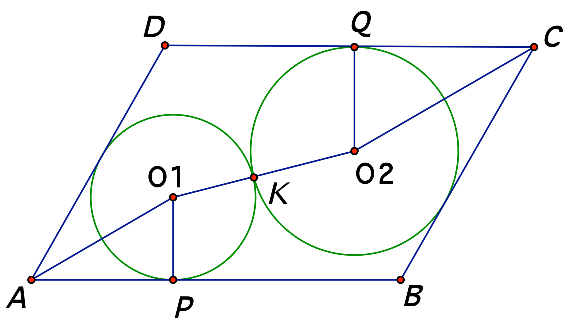
Sábado tarde, 24 de enero de 2008

SOLUCIONES

**4.** En el interior de un paralelogramo $ABCD$ se dibujan dos circunferencias. Una es tangente a los lados $AB$ y $AD$, y la otra es tangente a los lados $CD$ y $CB$. Probar que si estas circunferencias son tangentes entre si, el punto de tangencia está en la diagonal $AC$.

Solución:

Veremos que los puntos $A$, $K$ y $C$ están alineados.




Sean $O_1$ y $O_2$ los centros de la primera y segunda circunferencia, respectivamente. Notar que $AO_1$, biseca el ángulo $DAB$, y análogamente $CO_2$ biseca el ángulo $DCB$. Como los lados son paralelos dos a dos y los ángulos $O_1AK$ y $CO_2K$ son iguales, entonces $AO_1$ es paralelo a $CO_2$, y, como $O_1K$ y $O_2K$ están alineados, los ángulos $AO_1K$ y $KO_2C$ son iguales.

Como $O_1P \perp AB$ y $O_1Q \perp CD$, los triángulos $APO_1$ y $CQO_2$ son semejantes, por lo que $\frac{|O_1A|}{|O_1P|} = \frac{|O_2C|}{|O_2Q|}$, y como $|O_1P| = |O_1K|$ y $|O_2Q| = |O_2K|$, los triángulos $AO_1K$ y $KO_2C$ son semejantes, por lo que los puntos $A$, $K$ y $C$ están alineados, como se quería.

**5.** Dado un número natural $n$ mayor que 1, hallar todos los pares de números enteros $a$ y $b$ tales que las dos ecuaciones $x^n + ax - 2008 = 0$ y $x^n + bx - 2009 = 0$ tengan, al menos, una raíz común real.

Solución:

Restando ambas ecuaciones tenemos que $(b-a)x = 1$. Luego si estas ecuaciones van a tener una raíz común, tiene que ser $x = 1/(b-a)$. Notar que $a$ no puede ser igual a $b$. Substituyendo en una de las ecuaciones, tendremos que

$$(b-a)^{n-1}\,(a-2008(b-a)) = -1,$$

y que, por ser $a$ y $b$ enteros, estos dos factores serán uno igual a +1 y otro igual a –1.

Si $(b-a) = 1$, se tendrá $a = -1 + 2008 = 2007$, y por tanto $b = 2008$.

Si $(b-a) = -1$, se tendrá $a = (-1)^{n-1} - 2008$, y por tanto $b = (-1)^{n-1} - 2009$.

Luego los únicos pares de números $(a, b)$ son

$$(2007, 2008) \text{ y } ((-1)^{n-1} - 2008, (-1)^{n-1} - 2009).$$

**6.** Sean $C_1$ y $C_2$ dos circunferencias exteriores tangentes en el punto $P$. Por un punto $A$ de $C_2$ trazamos dos rectas tangentes a $C_1$ en los puntos $M$ y $M'$. Sean $N$ y $N'$ los puntos respectivos de corte, distintos ambos de $A$, de estas rectas con $C_2$.

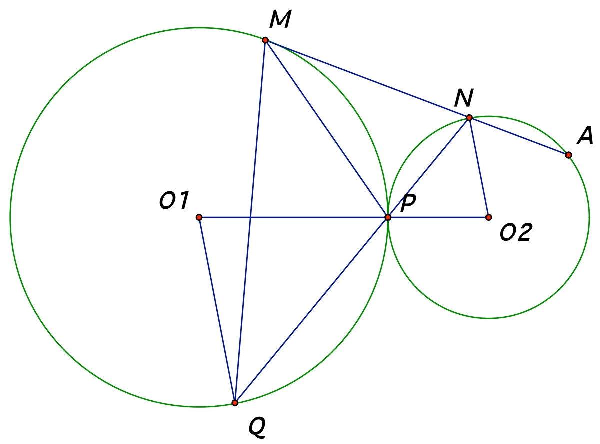
Probar que $|PN'|\cdot|MN| = |PN|\cdot|M'N'|$.

Solución:

Probaremos que para cualquier punto $N$ de $C_2$ y $M$ de $C_1$ tal que $MN$ es tangente a $C1$, se tiene que el cociente $\dfrac{|MN|}{|PN|}$ es constante.Sea $Q$ el punto de corte con $C_1$ de la recta por $N$ y $P$. Los triángulos $NMP$ y $NQM$ son congruentes porque comparten el ángulo en $N$ y $\angle MQN = \angle MQP = \angle MPN$ por ser inscrito y semi-inscrito con cuerda $MP$. Por lo tanto, se tiene:

$$\frac{|MN|}{|QN|} = \frac{|PN|}{|MN|}. \quad (*)$$

Siendo $O_1$ y $O_2$ los centros de $C_1$ y $C_2$, respectivamente, los triángulos isósceles $PO1Q$ y $PO2N$ son congruentes porque $\angle O_1PQ = \angle O_2PN$.




De aquí se sigue que $\frac{|QP|}{|PN|} = \frac{|O_2N|}{|O_1N|} = \frac{r_2}{r_1} = \lambda$, siendo $r_1$ y $r_2$ los respectivos radios de $C_1$ y $C_2$.

Como $|QN| = |QP| + |PN| = |PN|\,(1 + \lambda)$, substituyendo en (*) tenemos que $|MN|^2 = |PN|^2\,(1 + \lambda)$, de donde $\frac{|MN|}{|PN|} = \sqrt{(1+\lambda)}$, como queríamos.