

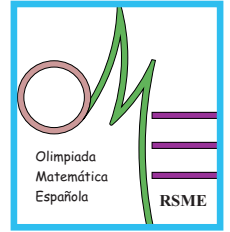


XLVI Olimpiada Matemática Española

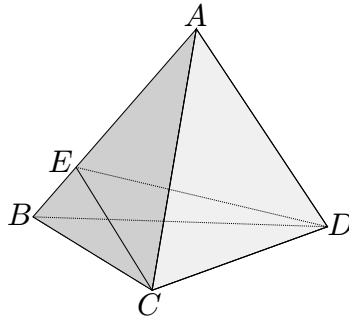
Primera Fase

Primera sesión

Sábado mañana, 16 de enero de 2010



1. Supongamos que tenemos un tablero con dieciséis casillas dispuestas en cuatro filas y cuatro columnas.
 - (a) Prueba que se pueden colocar siete fichas, nunca dos en la misma casilla, de forma que al eliminar dos filas y dos columnas cualesquiera, siempre quede alguna ficha sin eliminar.
 - (b) Prueba que si se colocan seis fichas, nunca dos en la misma casilla, siempre se puede eliminar dos filas y dos columnas de forma que todas las fichas sean eliminadas.
2. Se considera un tetraedro regular como el de la figura. Si el punto E recorre la arista AB . ¿Cuándo el ángulo \widehat{CED} es máximo?



3. Decimos que un conjunto E de números naturales es *especial* cuando al tomar dos elementos cualesquiera distintos $a, b \in E$ se tiene que $(a - b)^2$ divide al producto ab .
 - (a) Encuentra un conjunto *especial* formado por tres elementos.
 - (b) ¿Existe un conjunto *especial* formado por cuatro números naturales que están en progresión aritmética?

**No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.**

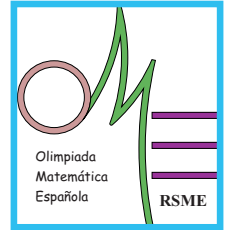


XLVI Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Segunda sesión

Sábado tarde, 16 de enero de 2010



4. Un jardinero tiene que plantar en una fila a lo largo de un camino tres robles, cuatro encinas y cinco hayas. Planta los árboles al azar; siendo la probabilidad de plantar un árbol u otro la misma. Halla la probabilidad de que, una vez plantados todos los árboles, no haya dos hayas consecutivas.

5. Calcula las soluciones reales de la ecuación:

$$\sqrt[3]{1729 - X} + \sqrt[3]{X} = 19.$$

6. Averigua qué números de cuatro cifras significativas, \overline{abcd} (con $a \neq 0$), son iguales a $\overline{ab}^2 + \overline{cd}^2 - \overline{cd}$.

Nota: La notación \overline{ab} representa, en este problema, el número que tiene a decenas y b unidades; en este caso se tiene que $a, b \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

**No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.**