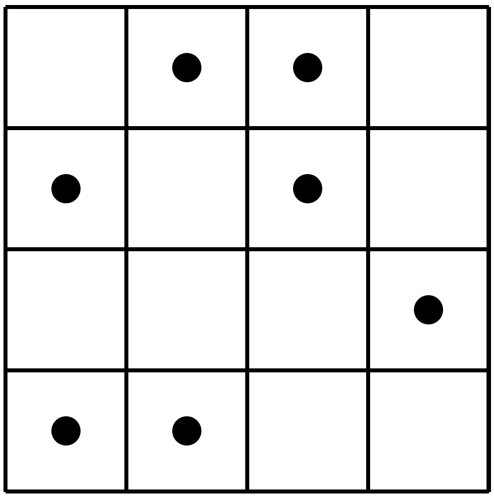
Problema 1. *Supongamos que tenemos un tablero con dieciséis casillas dispuestas en cuatro filas y cuatro columnas.*

(a) Prueba que se pueden colocar siete fichas, nunca dos en la misma casilla, de forma que al eliminar dos filas y dos columnas cualesquiera, siempre quede alguna ficha sin eliminar.

(b) Prueba que si se colocan seis fichas, nunca dos en la misma casilla, siempre se puede eliminar dos filas y dos columnas de forma que todas las fichas sean eliminadas.

Solución. (a). Una solución es:

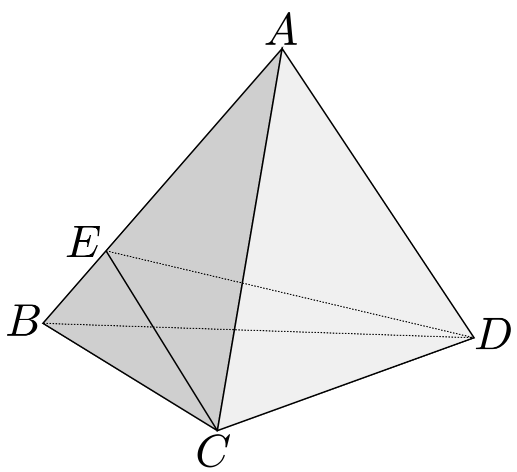


(b). Si se tienen 6 fichas en el tablero, alguna columna tendrá al menos dos fichas; eliminamos esa columna.

Quedan, como máximo 4 fichas, y exactamente tres columnas. Por el mismo procedimiento podemos ahora eliminar una columna de forma que nos queden. como máximo, dos fichas en el tablero.

El tercer y cuarto paso consiste en eliminar dos filas de forma que no queden fichas en el tablero.

Problema 2. *Se considera un tetraedro regular como el de la figura. Si el punto E recorre la arista AB. ¿Cuándo el ángulo $\widehat{CED}$ es máximo?*



Solución. Supongamos que el tetraedro tiene arista de longitud 1, sea α el ángulo CED y x la longitud del segmento AE.

Si aplicamos el Teorema del coseno al triángulo AEC tenemos:

$$EC^2 = x^2 + 1 - 2x\cos 60^o = x^2 + 1 - x.$$

Por simetría se tiene que la longitud EC es igual a la longitud ED. De nuevo por el Teorema del coseno, ahora para el triángulo ECD, se tiene

$$1 = (x^2 - x + 1) + (x^2 - x + 1) - 2(\sqrt{x^2 - x + 1})^2 \cos\alpha$$

$$1 = 2(x^2 - x + 1)(1 - \cos\alpha).$$

Despejando se tiene:

$$\cos\alpha = 1 \ - \ \frac{1}{2(x^2 - x + 1)}. \tag{1}$$

Por ser la función cos decreciente en el primer cuadrante, par encontrar el valor máximo de α tenemos que buscar el valor de $x \in [0, 1]$ que haga mínima la función dada en (1), o equivalentemente que haga mínimo el denominador $x^2 - x + 1$. Es evidente que este mínimo se alcanza para $x = \frac{1}{2}$.

La respuesta es: cuando el punto E es el punto medio del lado AB. Podemos calcular en este caso el valor de α; se tiene: $\alpha = \arccos\frac{1}{3}$.

Problema 3. *Decimos que un conjunto E de números naturales es* especial *cuando al tomar dos elementos cualesquiera distintos $a, b \in E$ se tiene que $(a-b)^2$ divide al producto ab.*

(a) Encuentra un conjunto especial formado por tres elementos.

(b) ¿Existe un conjunto especial formado por cuatro números naturales que están en progresión aritmética?

Solución. (a). Un conjunto especial de tres elementos es $\{2, 3, 4\}$.

(b). Supongamos que $\{x, x+y, x+2y, x+3y\}$ forman un conjunto especial.

Podemos suponer que x e y son primos relativos, pues si llamamos $d = mcd\{x, y\}$ y $d \neq 1$, tomando $x' = x/d$ e $y' = y/d$ tenemos un conjunto especial $\{x', x'+y', x'+2y', x'+3y'\}$ con x' e y' primos relativos.

Sean pues x e y primos relativos. Por ser el conjunto especial y^2 divide a $x(x+y)$, y existe un entero k tal que $x(x+y) = y^2k$, por lo tanto $x^2 = y^2k - xy = y(yk - x)$, lo que implica que $y = 1$ al ser un divisor común de x e y.

Así pues el conjunto especial es de la forma $\{x, x+1, x+2, x+3\}$. Al ser especial 4 es un divisor de $x(x+2)$ y de $(x+1)(x+3)$, pero uno de ellos es un número impar, lo que es una contradicción. Por lo tanto la suposición de que existe un conjunto especial formado por cuatro términos en progresión aritmética es falsa.

Problema 4. *Un jardinero tiene que plantar en una fila a lo largo de un camino tres robles, cuatro encinas y cinco hayas. Planta los árboles al azar; siendo la probabilidad de plantar un árbol u otro la misma.*

Halla la probabilidad de que, una vez plantados todos los árboles, no haya dos hayas consecutivas.

Solución. Una forma de hacer una disposición en la que no haya dos hayas consecutivas puede ser imaginar plantados todos los robles y todas las encinas y colocar las cinco haya entre los huecos y los extremos; tenemos pues ocho huecos para colocar las hayas.

El problema puede plantearse con dos supuestos diferentes, aunque el resultado final es el mismo.

<u>Supuesto 1</u>. No es posible distinguir los robles entre sí, las encinas entre sí y las hayas entre sí. El número total de disposiciones es igual a las permutaciones con repetición de 12 elementos de los que 3, 4 y 5 son iguales entre si; esto es $\frac{12!}{3!\,4!\,5!}$. El número de disposiciones favorables es igual a las combinaciones de 8 elementos tomados de 5 en 5 multiplicado por el número de permutaciones con repetición de 7 elementos de los que 3 y 4 son iguales entre sí. La probabilidad es:

$$p_1 = \frac{\frac{8!}{5!\,3!}\,\frac{7!}{3!\,4!}}{\frac{12!}{3!\,4!\,5!}} = \frac{7}{11 \times 9} = \frac{7}{99}.$$

<u>Supuesto 2</u>. Es posibles distinguir entre los robles, encinas y hayas. En este caso el número total de disposiciones es 12!, y el de disposiciones favorables es el producto de 7!, la forma de colocar los robles y las encinas, por $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4$, la forma de colocar las cinco hayas de fora que no haya dos hayas consecutivas. La probabilidad es:

$$p_2 = \frac{(8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4)\,(7!)}{12!} = \frac{7}{11 \times 9} = \frac{7}{99}.$$

Problema 5. *Calcula las soluciones reales de la ecuación:*

$$\sqrt[3]{1729 - X} + \sqrt[3]{X} = 19.$$

Solución. Si llamamos $a = \sqrt[3]{1729 - x}$ y $b = \sqrt[3]{x}$, se tiene que a y b son raíces del sistema $\left.\begin{array}{l} a + b = 19 \\ a^3 + b^3 = 1729 \end{array}\right\}$. Para resolver este sistema procedemos como sigue:

$$19^3 = (a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = 1729 + 3 \times 19ab,$$

de aquí se tiene $ab = 90$. Luego a y b son las raíces del sistema $\left.\begin{array}{l} a + b = 19 \\ ab = 90 \end{array}\right\}$, y por tanto de la ecuación $z^2 - 19z + 90 = 0$. Como las raíces de ésta son 10 y 9, resulta que $x = 10^3 = 1000$ y $x = 9^3 = 729$ son las únicas raíces reales de la ecuación dada.

Problema 6. *Averigua qué números de cuatro cifras significativas, $\overline{abcd}$ (con $a \neq 0$), son iguales a $\overline{ab}^2 + \overline{cd}^2 - \overline{cd}$.*

<u>Nota</u>: La notación $\overline{ab}$ representa, en este problema, el número que tiene a decenas y b unidades; en este caso se tiene que $a, b \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Solución. Tenemos $\overline{abcd} = \overline{ab}^2 + \overline{cd}^2 - \overline{cd}$, por lo tanto

$$\overline{ab00} = \overline{ab}^2 + \overline{cd}^2 - 2\overline{cd} = \overline{ab}^2 + (\overline{cd} - 1)^2 - 1,$$

y de aquí se tiene:

$$\overline{ab00} + 1 = \overline{ab}^2 + (\overline{cd} - 1)^2. \tag{2}$$

Vamos a reordenar los términos de esta expresión para determinar los valores de a, b, c y d. Escribimos

$$1 = \overline{ab}^2 - 100\overline{ab} + (\overline{cd} - 1)^2 = (\overline{ab} - 50)^2 + (\overline{cd} - 1)^2 - 50^2. \tag{3}$$

y ordenando los términos

$$2501 = 50^2 + 1 = \overline{ab}^2 - 100\overline{ab} + (\overline{cd} - 1)^2 = (\overline{ab} - 50)^2 + (\overline{cd} - 1)^2. \tag{4}$$

Tenemos que descomponer 2501 como suma de dos cuadrados; las única descomposiciones son:

$$2501 = 50^2 + 1 = 49^2 + 10^2.$$

Analizar los diferentes casos para una descomposición del tipo $2501 = x^2 + y^2$,utilizando las cifras de las unidades; módulo 10 éstas deben sumar 1. Se tienen las siguientes tablas:

Unidades de n:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Unidades de n^2:	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

Tenemos entonces las siguientes posibilidades par comenzar el análisis:

Unidades de x^2	Unidades de y^2	Unidades de x	Unidades de y
0	1	0	1
0	1	0	9
1	0	1	0
1	0	9	0
5	6	5	4
5	6	5	6
6	5	4	5
6	5	6	5

Estudiamos ahora los posibles valores para $\overline{ab} - 50$, siendo $(\overline{ab} - 50)^2 = 50^2, 1^2, 49^2$ y 10^2.

$\overline{ab} - 50 =$	$\overline{ab}$		$2501 - (\overline{ab} - 50)^2$	$\overline{cd} - 1$	$\overline{cd}$	solución: $\overline{abcd}$
50	100	*NO*				
-50	0	*NO*				
1	51		2500	50	51	5151
-1	49		2500	50	51	4951
49	99		100	10	11	9911
-49	1	*NO*				
10	60		2401	49	50	6050
-10	40		2401	49	50	4050