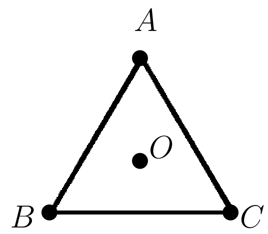
Problema 1. *Se considera un triángulo equilátero de lado 1 y centro O, como el de la figura.*

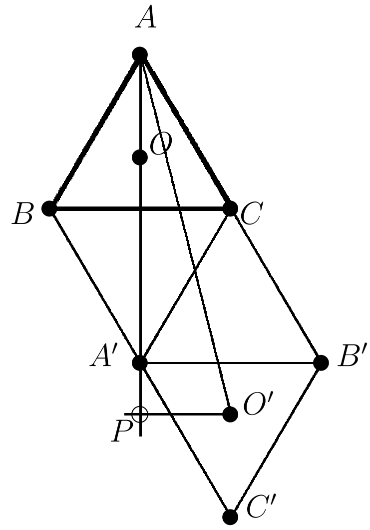


Un rayo parte de O y se refleja en los tres lados, $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, (en el orden dado), hasta alcanzar el vértice A.

Determina la longitud mínima del recorrido del rayo.

Nota: Cuando el rayo se refleja en un lado, los ángulos de entrada (incidencia) y salida (reflexión) coinciden.

Solución. Como el rayo se refleja en los lados indicados, basta con desarrollar el camino recorrido por el rayo, para ello desdoblamos el triángulo según la siguiente figura.



Esta figura nos indica que existe un único camino para ir del punto O al punto A reflejándose en los lados del triángulo en el orden indicado. Para calcular la distancia recorrida por el rayo, basta considerar el triángulo APO'; es un triángulo rectángulo del que tenemos que calcular la hipotenusa AO'. Sabemos que $O'P$ es igual a $\frac{1}{2}$. La distancia PA es $1+1+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$ de la altura $h=\frac{\sqrt{3}}{2}$ del triángulo. En este caso tenemos:

$$(AO')^2 = (O'P)^2 + (PA)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{7^2 \times 3}{3^2 \times 2^2} = \frac{1}{4} + \frac{49}{12} = \frac{13}{3}.$$

Por lo tanto la distancia AO' es: $\sqrt{\frac{13}{3}} = \frac{\sqrt{39}}{3}$.

Problema 2. *Calcula las soluciones reales de la ecuación:*

$$\sqrt[4]{97-X} + \sqrt[4]{X} = 5.$$

Solución. Si llamamos $a = \sqrt[4]{97-x}$ y $b = \sqrt[4]{x}$, se verifica:

$$\left.\begin{array}{l} a+b=5 \\ a^4+b^4=97 \end{array}\right\}$$

Para resolver este sistema procedemos como sigue:

$$25 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

y de aquí se tiene $a^2 + b^2 = 25 - 2ab$. Por otro lado

$$625 = (a+b)^4 = a^4 + b^4 + 4ab(a^2+b^2) + 6a^2b^2 = 97 + 100ab - 2a^2b^2,$$

y de aquí se tiene $a^2b^2 - 50ab + 264 = 0$. Entonces ab es una raíz de $z^2 - 50z + 264 = 0$; como las raíces son 44 y 6, estudiamos cada uno de estos casos.

Si $ab = 44$, entonces a y b son las soluciones del sistema $\left.\begin{array}{l} a+b=5 \\ ab=44 \end{array}\right\}$, luego de la ecuación $z^2 - 5z + 44 = 0$; ésta no tiene raíces reales. Si $ab = 6$, entonces a y b son raíces de la ecuación $z^2 - 5z + 6 = 0$, que tiene las raíces 3 y 2.

Si $b = 3$, entonces $x = 81$, y si $x = 2$, entonces $x = 16$. Éstas son las únicas raíces reales de la ecuación dada.

Solución.[Alternativa] Si llamamos $a = \sqrt[4]{97-x}$ y $b = \sqrt[4]{x}$, se verifica:

$$\left.\begin{array}{l} a+b=5 \\ a^4+b^4=97 \end{array}\right\}$$

Utilizamos una variable temporal t y escribimos $a = \frac{5}{2} + t$, $b = \frac{5}{2} - t$. entonces se verifica:

$$97 = a^4 + b^4 = \left(\frac{5}{2} + t\right)^4 + \left(\frac{5}{2} - t\right)^4 = 2t^4 + 12\left(\frac{5}{2}\right)^2 t^2 + 2\left(\frac{5}{2}\right)^4.$$

Simplificando resulta:

$$16t^4 + 600t^2 - 151 = 0$$

El valor de t es $\pm\frac{1}{2}$. Se tiene entonces:

$$b = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3;$$

$$b = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2.$$

Entonces al igualar $b = \sqrt[4]{x}$, resulta:

$$\begin{array}{l} b = 3 \Rightarrow x = 81, \\ b = 2 \Rightarrow x = 16, \end{array}$$

que son las únicas dos soluciones reales de la ecuación dada.

Problema 3. *Dado el polinomio $P(X) = X^4 + \square X^3 + \square X^2 + \square X + \square$, en el que cada cuadrado representa un hueco donde se colocará un coeficiente, se plantea el siguiente juego entre dos jugadores: Alternativamente, el primer y el segundo jugador eligen un hueco vacío y colocan en él un entero no nulo hasta rellenar todos los cuatro huecos. Si el polinomio resultante tiene al menos dos raíces enteras gana el segundo jugador, en otro caso el ganador es el primero.*

Prueba que, eligiendo la estrategia adecuada, el primer jugador siempre puede ganar.

Solución.

<u>Nota:</u> El enunciado presenta cierta ambigüedad: hay que distinguir si *"dos raíces enteras"* significa que éstas son distintas, o por el contrario pueden ser raíces dobles.

El caso de dos raíces distintas es sencillo; basta con la primera jugada para el primer jugador. En el caso de raíces dobles tiene que hacer uso también de la segunda jugada.

Una posible estrategia es:

(i) El primer jugador coloca un -1 en el lugar a_4, quedando el polinomio en la forma:

$$X^4 + \square X^3 + \square X^2 + \square X - 1$$

De esta forma el primer jugador fuerza a que las posibles raíces enteras del polinomio sean 1 y -1.
(ii) El segundo jugador coloca $a_i \neq 0$ en uno de los huecos.
(iii) El primer jugador coloca $a_j \neq 0$ en uno de los huecos.
(iv) El segundo jugador coloca $a_k \neq 0$ en el único hueco restante.

Observa que el polinomio tiene ahora la forma $X^4 + a_1X^3 + a_2X^2 + a_3X - 1$ y que las posibles raíces enteras (distintas) de este polinomio son 1 y -1, ya que el término independiente es -1.

Cuando 1 es una raíz se tiene $1 + a_1 + a_2 + a_3 - 1 = 0$, esto es, $a_1 + a_2 + a_3 = 0$, y cuando -1 es una raíz se tiene $1 - a_1 + a_2 - a_3 - 1 = 0$, esto es $-a_1 + a_2 - a_3 = 0$.

Sean cuales sean los valores de $a_1, a-2, a_3$ se tendrá siempre $2a_2 = 0$, lo que implica que $a_2 = 0$, y esto no está permitido por las reglas del juego. Por lo tanto el caso de dos raíces distintas está resuelto.

En el caso en el que las dos raíces sean iguales.

Si 1 es una raíz doble, entonces se verifica $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ y $4 + 3a_1 + 2a_2 + a_3 = 0$, por lo tanto se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ 4 + 2a_1 + 2a_2 = 0 \end{array}\right\}$$

siendo $a_3 = 4 + a_1$ y $a_2 = -4 - 2a_1$.

Si -1 es una raíz doble, entonces se verifica $-a_1 + a_2 - a_3 = 0$ y $4 - 3a_1 + 2a_2 - a_3 = 0$, por lo tanto se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} -a_1 + a_2 - a_3 = 0 \\ 4 - 2a_1 + 2a_2 = 0 \end{array}\right\}$$

siendo $a_3 = -4 + a_1$ y $a_2 = -4 + 2a_1$.

Está claro que si el segundo jugador hace $a_i = a_2$, entonces el primer jugador puede colocar $a_j = a_1$ de forma que $-4-2a_1 \neq a_2$ y $-4+2a_1 \neq a_2$, de esta forma no habrá dos raíces enteras.

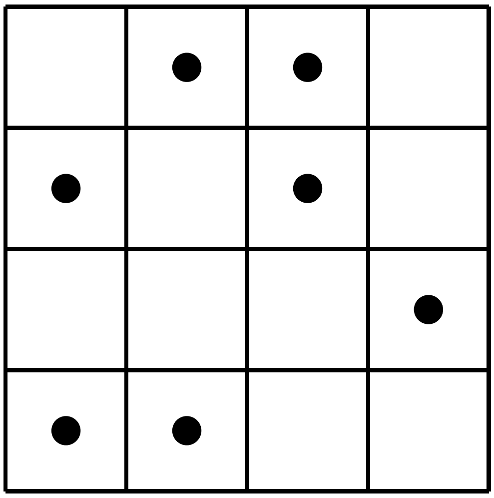
Por el contrario, si el primer jugador hace $a_i = a_1$, basta tomar a_2 de forma que $a_2 \neq -4 - 2a_1$ y $a_2 \neq -4 + 2a_1$. El caso de $a_i = a_3$ se hace de la misma forma.

Problema 4. *Supongamos que tenemos un tablero con dieciséis casillas dispuestas en cuatro filas y cuatro columnas.*

(a) Prueba que se pueden colocar siete fichas, nunca dos en la misma casilla, de forma que al eliminar dos filas y dos columnas cualesquiera, siempre quede alguna ficha sin eliminar.

(b) Prueba que si se colocan seis fichas, nunca dos en la misma casilla, siempre se puede eliminar dos filas y dos columnas de forma que todas las fichas sean eliminadas.

Solución. (a). Una solución es:

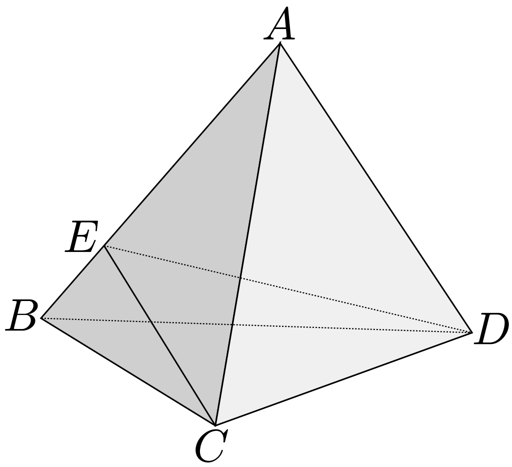


(b). Si se tienen 6 fichas en el tablero, alguna columna tendrá al menos dos fichas; eliminamos esa columna.

Quedan, como máximo 4 fichas, y exactamente tres columnas. Por el mismo procedimiento podemos ahora eliminar una columna de forma que nos queden. como máximo, dos fichas en el tablero.

El tercer y cuarto paso consiste en eliminar dos filas de forma que no queden fichas en el tablero.

Problema 5. *Se considera un tetraedro regular como el de la figura. Si el punto E recorre la arista AB. ¿Cuándo el ángulo $\widehat{CED}$ es máximo?*



Solución. Supongamos que el tetraedro tiene arista de longitud 1, sea α el ángulo CED y x la longitud del segmento AE.

Si aplicamos el Teorema del coseno al triángulo AEC tenemos:

$$EC^2 = x^2 + 1 - 2x\cos 60^o = x^2 + 1 - x.$$

Por simetría se tiene que la longitud EC es igual a la longitud ED. De nuevo por el Teorema del coseno, ahora para el triángulo ECD, se tiene

$$1 = (x^2 - x + 1) + (x^2 - x + 1) - 2(\sqrt{x^2 - x + 1})^2 \cos\alpha$$

$$1 = 2(x^2 - x + 1)(1 - \cos\alpha).$$

Despejando se tiene:

$$\cos\alpha = 1 - \frac{1}{2(x^2 - x + 1)}. \tag{1}$$

Por ser la función cos decreciente en el primer cuadrante, par encontrar el valor máximo de α tenemos que buscar el valor de $x \in [0, 1]$ que haga mínima la función dada en (1), o equivalentemente que haga mínimo el denominador $x^2 - x + 1$. Es evidente que este mínimo se alcanza para $x = \frac{1}{2}$.

La respuesta es: cuando el punto E es el punto medio del lado AB. Podemos calcular en este caso el valor de α; se tiene: $\alpha = \arccos \frac{1}{3}$.

Problema 6. *Decimos que un conjunto E de números naturales es* especial *cuando al tomar dos elementos cualesquiera distintos $a, b \in E$ se tiene que $(a - b)^2$ divide al producto ab.*

(a) Encuentra un conjunto especial formado por tres elementos.

(b) ¿Existe un conjunto especial formado por cuatro números naturales que están en progresión aritmética?

Solución. (a). Un conjunto especial de tres elementos es $\{2, 3, 4\}$.

(b). Supongamos que $\{x, x + y, x + 2y, x + 3y\}$ forman un conjunto especial.

Podemos suponer que x e y son primos relativos, pues si llamamos $d = mcd\{x, y\}$ y $d \neq 1$, tomando $x' = x/d$ e $y' = y/d$ tenemos un conjunto especial $\{x', x' + y', x' + 2y', x' + 3y'\}$ con x' e y' primos relativos.

Sean pues x e y primos relativos. Por ser el conjunto especial y^2 divide a $x(x + y)$, y existe un entero k tal que $x(x + y) = y^2k$, por lo tanto $x^2 = y^2k - xy = y(yk - x)$, lo que implica que $y = 1$ al ser un divisor común de x e y.

Así pues el conjunto especial es de la forma $\{x, x + 1, x + 2, x + 3\}$. Al ser especial 4 es un divisor de $x(x + 2)$ y de $(x + 1)(x + 3)$, pero uno de ellos es un número impar, lo que es una contradicción. Por lo tanto la suposición de que existe un conjunto especial formado por cuatro términos en progresión aritmética es falsa.