Problema 1. *Sea I_n el conjunto de los n primeros números naturales impares. Por ejemplo: $I_3 = \{1, 3, 5\}$, $I_6 = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$, etc.*

¿Para qué números n el conjunto I_n se puede descomponer en dos partes (disjuntas) de forma que coincidan las sumas de los números en cada una de ellas?

Solución. Los primeros casos son:

$I_1 = \{1\}$	no descompone
$I_2 = \{1, 3\}$	no descompone
$I_3 = \{1, 3, 5\}$	no descompone
$I_4 = \{1, 3, 5, 7\}$	descompone $\{1, 7\}$ y $\{3, 5\}$
$I_5 =$	no descompone
$I_6 = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$	descompone $\{1, 3, 5, 9\}$ y $\{7, 11\}$

Observa que para que I_n se pueda descomponer en dos partes que tengan la misma suma, tiene que ser n par, ya que en ese caso la suma de todos los elementos de I_n es un número par.

Observa que si I_m descompone, entonces también lo hace I_{m+4}, ya que se tiene

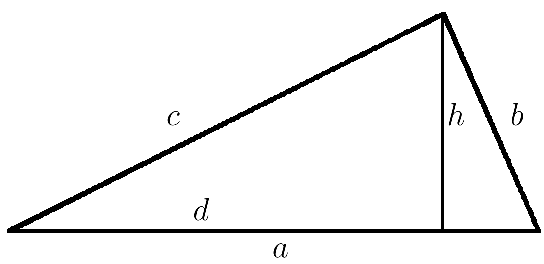
$$I_{m+4} = I_m \cup \{2m + 1, 2m + 3, 2m + 5, 2m + 7\}.$$

Si $I_m = P_1 \cup P_2$ es una descomposición de I_{2m}, entonces $P_1 \cup \{2m+1, 2m+7\}$, $P_2 \cup \{2m+3, 2m+5\}$ es una descomposición de I_{2m+4}.

Como I_4 e I_6 descomponen, podemos concluir que I_n descompone para cada n, par, mayor o igual que 4.

Problema 2. *Determina los lados del triángulo rectángulo del que se conocen el perímetro, $p = 96$, y la altura sobre la hipotenusa, $h = \dfrac{96}{5}$.*

Solución. Consideramos el triángulo rectángulo de la figura.



Buscamos relaciones entre estos segmentos.

El área del triángulo es: $\frac{bc}{2} = \frac{ah}{2}$, de aquí se deduce que

$$bc = ah. \tag{1}$$

Por ser $p = a + b + c$, se tiene $b + c = p - a$, luego $(b + c)^2 = (p - a)^2$, y de aquí, utilizando que $a^2 = b^2 + c^2$, se tiene $2bc = p^2 - 2pa$. Ahora utilizamos la relación (1) y se tiene: $2ah = p^2 - 2pa$. Finalmente, podemos calcular a como:

$$a = \frac{p^2}{2(h + p)}. \tag{2}$$

Como ya es conocido a, y teniendo en cuenta que se tienen las relaciones: $b+c = p-a$ y $bc = ah$, podemos calcular b y c como las soluciones de la ecuación de segundo grado $z^2-(b+c)z+bc = 0$, esto es de la ecuación $z^2 - (p-a)z + ah = 0$.

En nuestro caso, con los valores dados, se tiene:

$$p = 96,$$

$$h = 96/5,$$

$$a = \frac{p^2}{2(h+p)} = \frac{96^2}{2(96+96/5)} = 40.$$

Falta calcular b y c, que son raíces de la ecuación $z^2-(p-a)z+ah = 0$, esto es, de la ecuación $z^2 - 56z + 768 = 0$; y cuyas raíces son: 32 y 24.

Los lados del triángulo dado son: 40, 32 y 24.

Problema 3. *Halla todos los números naturales n que verifican la condición:*

$$\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{2n}{3}\right] = n + 335$$

donde $[x]$ es la parte entera de x. (Esto es, $[1{,}32] = 1$, $[2] = 2$, $\left[\frac{1}{2}\right] = 0$, $[\pi] = 3$, etc.)

Solución. Distinguimos casos según n sea de la forma $6k$, $6k+1$, $6k+2$, $6k+3$, $6k+4$ o $6k+5$ (observemos que n es siempre de alguna de estas seis formas) y hacemos la siguiente tabla:

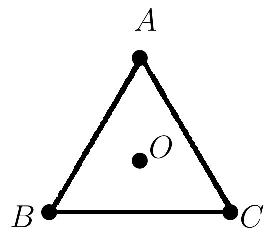
n	$[\frac{n}{2}]$	$[\frac{2n}{3}]$	$[\frac{n}{2}] + [\frac{2n}{3}]$	$n+335$
$6k$	$3k$	$4k$	$7k$	$6k+335$
$6k+1$	$3k$	$4k$	$7k$	$6k+336$
$6k+2$	$3k+1$	$4k+1$	$7k+2$	$6k+337$
$6k+3$	$3k+1$	$4k+2$	$7k+3$	$6k+338$
$6k+4$	$3k+2$	$4k+2$	$7k+4$	$6k+339$
$6k+5$	$3k+2$	$4k+3$	$7k+5$	$6k+340$

Igualando las últimas dos columnas obtenemos que:

- Si $n = 6k$ entonces $7k = 6k + 334$, de donde $k = 335$ y $n = 6 \cdot 334 = 2010$.
- Si $n = 6k+1$ entonces $7k = 6k + 335$, de donde $k = 336$ y $n = 6 \cdot 335 + 1 = 2017$.
- Si $n = 6k+2$ entonces $7k+2 = 6k + 336$, de donde $k = 335$ y $n = 6 \cdot 334 + 2 = 2012$.
- Si $n = 6k+3$ entonces $7k+3 = 6k + 337$, de donde $k = 335$ y $n = 6 \cdot 334 + 3 = 2013$.
- Si $n = 6k+4$ entonces $7k+4 = 6k + 338$, de donde $k = 335$ y $n = 6 \cdot 334 + 4 = 2014$.
- Si $n = 6k+5$ entonces $7k+5 = 6k + 339$, de donde $k = 335$ y $n = 6 \cdot 334 + 5 = 2015$.

Por tanto, hay seis números que cumplen la ecuación: 2010, 2012, 2013, 2014, 2015 y 2017.

Problema 4. *Se considera un triángulo equilátero de lado 1 y centro O, como el de la figura.*

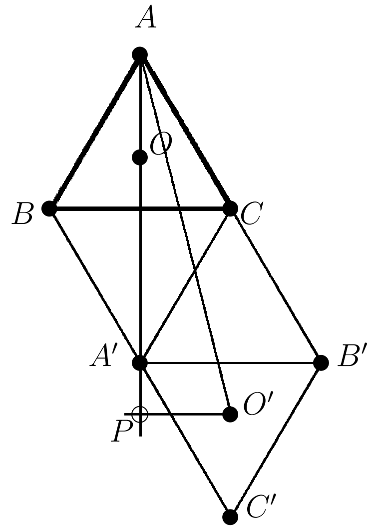


Un rayo parte de O y se refleja en los tres lados, $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, (en el orden dado), hasta alcanzar el vértice A.

Determina la longitud mínima del recorrido del rayo.

Nota: Cuando el rayo se refleja en un lado, los ángulos de entrada (incidencia) y salida (reflexión) coinciden.

Solución. Como el rayo se refleja en los lados indicados, basta con desarrollar el camino recorrido por el rayo, para ello desdoblamos el triángulo según la siguiente figura.



Esta figura nos indica que existe un único camino para ir del punto O al punto A reflejándose en los lados del triángulo en el orden indicado. Para calcular la distancia recorrida por el rayo, basta considerar el triángulo APO'; es un triángulo rectángulo del que tenemos que calcular la hipotenusa AO'. Sabemos que $O'P$ es igual a $\frac{1}{2}$. La distancia PA es $1+1+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$ de la altura $h=\frac{\sqrt{3}}{2}$ del triángulo. En este caso tenemos:

$$(AO')^2=(O'P)^2+(PA)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{7}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{7^2\times 3}{3^2\times 2^2}=\frac{1}{4}+\frac{49}{12}=\frac{13}{3}.$$

Por lo tanto la distancia AO' es: $\sqrt{\frac{13}{3}}=\frac{\sqrt{39}}{3}$.

Problema 5. *Calcula las soluciones reales de la ecuación:*

$$\sqrt[4]{97-X}+\sqrt[4]{X}=5.$$

Solución. Si llamamos $a = \sqrt[4]{97-x}$ y $b = \sqrt[4]{x}$, se verifica:

$$\left.\begin{array}{l} a+b=5 \\ a^4+b^4=97 \end{array}\right\}$$

Para resolver este sistema procedemos como sigue:

$$25 = (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$

y de aquí se tiene $a^2+b^2 = 25-2ab$. Por otro lado

$$625 = (a+b)^4 = a^4+b^4+4ab(a^2+b^2)+6a^2b^2 = 97+100ab-2a^2b^2,$$

y de aquí se tiene $a^2b^2-50ab+264=0$. Entonces ab es una raíz de $z^2-50z+264=0$; como las raíces son 44 y 6, estudiamos cada uno de estos casos.

Si $ab = 44$, entonces a y b son las soluciones del sistema $\left.\begin{array}{l} a+b=5 \\ ab=44 \end{array}\right\}$, luego de la ecuación $z^2-5z+44=0$; ésta no tiene raíces reales. Si $ab=6$, entonces a y b son raíces de la ecuación $z^2-5z+6=0$, que tiene las raíces 3 y 2.

Si $b=3$, entonces $x=81$, y si $x=2$, entonces $x=16$. Éstas son las únicas raíces reales de la ecuación dada.

Solución.[Alternativa] Si llamamos $a = \sqrt[4]{97-x}$ y $b = \sqrt[4]{x}$, se verifica:

$$\left.\begin{array}{l} a+b=5 \\ a^4+b^4=97 \end{array}\right\}$$

Utilizamos una variable temporal t y escribimos $a = \frac{5}{2}+t$, $b = \frac{5}{2}-t$. entonces se verifica:

$$97 = a^4+b^4 = \left(\frac{5}{2}+t\right)^4 + \left(\frac{5}{2}-t\right)^4 = 2t^4+12\left(\frac{5}{2}\right)^2 t^2 + 2\left(\frac{5}{2}\right)^4.$$

Simplificando resulta:

$$16t^4+600t^2-151=0$$

El valor de t es $\pm\frac{1}{2}$. Se tiene entonces:

$$b = \frac{5}{2}+\frac{1}{2} = 3;$$

$$b = \frac{5}{2}-\frac{1}{2} = 2.$$

Entonces al igualar $b = \sqrt[4]{x}$, resulta:

$$\begin{array}{l} b=3 \Rightarrow x=81, \\ b=2 \Rightarrow x=16, \end{array}$$

que son las únicas dos soluciones reales de la ecuación dada.

Problema 6. *Dado el polinomio* $P(X) = X^4 + \square X^3 + \square X^2 + \square X + \square$, *en el que cada cuadrado representa un hueco donde se colocará un coeficiente, se plantea el siguiente juego entre dos jugadores: Alternativamente, el primer y el segundo jugador eligen un hueco vacío y colocan en él un entero no nulo hasta rellenar todos los cuatro huecos. Si el polinomio resultante tiene al menos dos raíces enteras gana el segundo jugador, en otro caso el ganador es el primero.*

Prueba que, eligiendo la estrategia adecuada, el primer jugador siempre puede ganar.

Solución.

Nota: El enunciado presenta cierta ambigüedad: hay que distinguir si *"dos raíces enteras"* significa que éstas son distintas, o por el contrario pueden ser raíces dobles.

El caso de dos raíces distintas es sencillo; basta con la primera jugada para el primer jugador. En el caso de raíces dobles tiene que hacer uso también de la segunda jugada.

Una posible estrategia es:

(i) El primer jugador coloca un -1 en el lugar a_4, quedando el polinomio en la forma:

$$X^4 + \square X^3 + \square X^2 + \square X - 1$$

De esta forma el primer jugador fuerza a que las posibles raíces enteras del polinomio sean 1 y -1.
(ii) El segundo jugador coloca $a_i \neq 0$ en uno de los huecos.
(iii) El primer jugador coloca $a_j \neq 0$ en uno de los huecos.
(iv) El segundo jugador coloca $a_k \neq 0$ en el único hueco restante.

Observa que el polinomio tiene ahora la forma $X^4 + a_1X^3 + a_2X^2 + a_3X - 1$ y que las posibles raíces enteras (distintas) de este polinomio son 1 y -1, ya que el término independiente es -1.

Cuando 1 es una raíz se tiene $1 + a_1 + a_2 + a_3 - 1 = 0$, esto es, $a_1 + a_2 + a_3 = 0$, y cuando -1 es una raíz se tiene $1 - a_1 + a_2 - a_3 - 1 = 0$, esto es $-a_1 + a_2 - a_3 = 0$.

Sean cuales sean los valores de $a_1, a-2, a_3$ se tendrá siempre $2a_2 = 0$, lo que implica que $a_2 = 0$, y esto no está permitido por las reglas del juego. Por lo tanto el caso de dos raíces distintas está resuelto.

En el caso en el que las dos raíces sean iguales.

Si 1 es una raíz doble, entonces se verifica $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ y $4 + 3a_1 + 2a_2 + a_3 = 0$, por lo tanto se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ 4 + 2a_1 + 2a_2 = 0 \end{array}\right\}$$

siendo $a_3 = 4 + a_1$ y $a_2 = -4 - 2a_1$.

Si -1 es una raíz doble, entonces se verifica $-a_1 + a_2 - a_3 = 0$ y $4 - 3a_1 + 2a_2 - a_3 = 0$, por lo tanto se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} -a_1 + a_2 - a_3 = 0 \\ 4 - 2a_1 + 2a_2 = 0 \end{array}\right\}$$

siendo $a_3 = -4 + a_1$ y $a_2 = -4 + 2a_1$.

Está claro que si el segundo jugador hace $a_i = a_2$, entonces el primer jugador puede colocar $a_j = a_1$ de forma que $-4 - 2a_1 \neq a_2$ y $-4 + 2a_1 \neq a_2$, de esta forma no habrá dos raíces enteras.

Por el contrario, si el primer jugador hace $a_i = a_1$, basta tomar a_2 de forma que $a_2 \neq -4 - 2a_1$ y $a_2 \neq -4 + 2a_1$. El caso de $a_i = a_3$ se hace de la misma forma.