XLVII Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Primera sesión

Sábado mañana, 22 de enero de 2011

1. Sean n_1 y n_2 dos números naturales. Demuestra que la suma $\sqrt{n_1} + \sqrt[3]{n_2}$ es un número entero o un número irracional.

2. Demuestra que en un triángulo se verifica: si r es una recta que pasa por su baricentro y no pasa por ningún vértice, la suma de las distancias a dicha recta de los vértices que quedan en un mismo semiplano es igual a la distancia del tercer vértice a dicha recta.

3. En un hexágono regular de lado unidad se sitúan 19 puntos. Demuestra que hay al menos un par de ellos separados por una distancia no mayor que $\sqrt{3}/3$.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.

XLVII Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Segunda sesión

Sábado tarde, 22 de enero de 2011

4. Halla todas las ternas de números enteros positivos $a \leq b \leq c$ primitivas (es decir, que no tengan ningún factor primo común) tales que cada uno de ellos divide a la suma de los otros dos.

5. Halla todas las ternas (x, y, z) de números reales que son soluciones del sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} 3 \cdot 2^y - 1 &= 2^x + 2^{-x}\,, \\ 3 \cdot 2^z - 1 &= 2^y + 2^{-y}\,, \\ 3 \cdot 2^x - 1 &= 2^z + 2^{-z}\,. \end{aligned}\right\}$$

6. En una reunión entre cuatro países de la ONU, digamos A, B, C y D, el país A tiene el doble de representantes que el B, el triple que el C, y el cuádruple que el D. Se pretende distribuir a los representantes en mesas con el mismo número de personas en cada una. Sólo hay una condición: en cada mesa, cualquiera de los paises debe estar en inferioridad numérica respecto de los otros tres juntos. ¿Cuántos representantes debe haber en cada mesa, como mínimo?

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.