

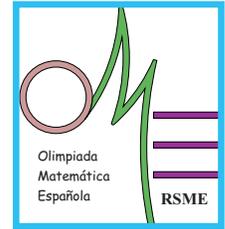


# XLVII Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Primera sesión

Sábado mañana, 22 de enero de 2011



1. Sean  $n_1$  y  $n_2$  dos números naturales. Demuestra que la suma  $\sqrt{n_1} + \sqrt[3]{n_2}$  es un número entero o un número irracional.
2. Demuestra que en un triángulo se verifica: si  $r$  es una recta que pasa por su baricentro y no pasa por ningún vértice, la suma de las distancias a dicha recta de los vértices que quedan en un mismo semiplano es igual a la distancia del tercer vértice a dicha recta.
3. En un hexágono regular de lado unidad se sitúan 19 puntos. Demuestra que hay al menos un par de ellos separados por una distancia no mayor que  $\sqrt{3}/3$ .

**No está permitido el uso de calculadoras.  
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.  
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.**

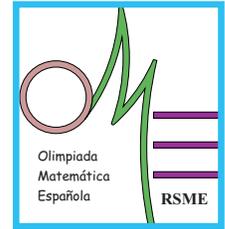


# XLVII Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Segunda sesión

Sábado tarde, 22 de enero de 2011



4. Halla todas las ternas de números enteros positivos  $a \leq b \leq c$  primitivas (es decir, que no tengan ningún factor primo común) tales que cada uno de ellos divide a la suma de los otros dos.

5. Halla todas las ternas  $(x, y, z)$  de números reales que son soluciones del sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} 3 \cdot 2^y - 1 &= 2^x + 2^{-x}, \\ 3 \cdot 2^z - 1 &= 2^y + 2^{-y}, \\ 3 \cdot 2^x - 1 &= 2^z + 2^{-z}. \end{aligned} \right\}$$

6. En una reunión entre cuatro países de la ONU, digamos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$ , el país  $A$  tiene el doble de representantes que el  $B$ , el triple que el  $C$ , y el cuádruple que el  $D$ . Se pretende distribuir a los representantes en mesas con el mismo número de personas en cada una. Sólo hay una condición: en cada mesa, cualquiera de los países debe estar en inferioridad numérica respecto de los otros tres juntos. ¿Cuántos representantes debe haber en cada mesa, como mínimo?

**No está permitido el uso de calculadoras.**

**Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.**

**El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.**