XLVII Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Soluciones a los problemas propuestos

Problema 3.1. Sean $n_1,\ n_2$ dos números naturales. Demuestra que la suma $\sqrt{n_1}+\sqrt[3]{n_2}$ es un número entero o un número irracional.

Solución Problema 3.1 Si se pone $x=\sqrt{n_1}+\sqrt[3]{n_2}$, se obtiene

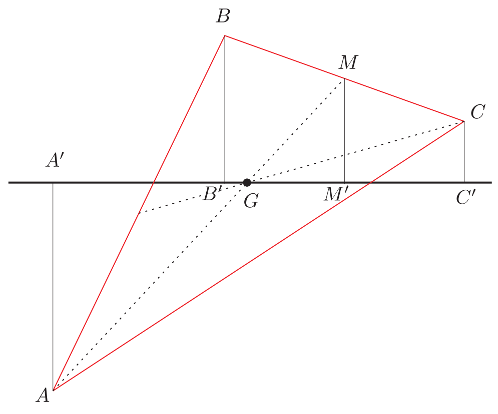
$$x-\sqrt{n_1}=\sqrt[3]{n_2}\Longrightarrow n_2=(x-\sqrt{n_1})^3\Longrightarrow(3x^2+n_1)\sqrt{n_1}=x^3+3n_1x-n_2\Longrightarrow$$

$$(3x^2+n_1)^2\,n_1=(x^3+3n_1x-n_2)^2\Longrightarrow x^6-3n_1x^4-2n_2x^3+3n_1^2x^2-6n_1n_2x+n_2^2-n_1^3=0$$

Esta ecuación tiene sólo soluciones enteras o irracionales por ser 1 el coeficiente principal.

Problema 3.2. Demuestra que en un triángulo se verifica: si r es una recta que pasa por su baricentro y no pasa por ningún vértice, la suma de las distancias a dicha recta de los vértices que quedan en un mismo semiplano es igual a la distancia del tercer vértice a dicha recta.

Solución Problema 3.2



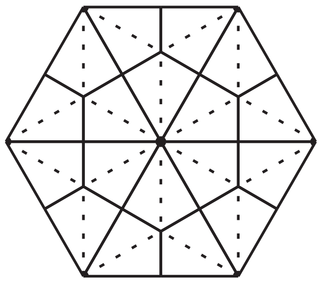
El triángulo GMM' es semejante a GAA' con razón de semejanza 2 (pues $AG=2GM$). Por tanto, $AA'=2MM'$.

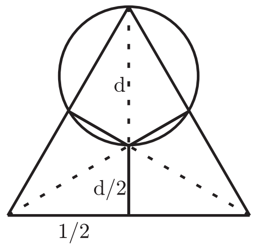
Por otro lado, MM' es la paralela media del trapecio $BB'C'C$, de donde $MM'=(BB'+CC')/2$.

En consecuencia: $AA'=2MM'=BB'+CC'$.

Problema 3.3. En un hexágono regular de lado unidad se sitúan 19 puntos. Demuestra que hay al menos un par de ellos separados por una distancia no mayor que $\sqrt{3}/3$.

Solución Problema 3.3 Dividamos el hexágono regular en 6 triángulos equiláteros iguales. Cada uno de ellos, si trazamos sus alturas, quedará dividido en 6 triángulos rectángulos. Uniendo estos triángulos rectángulos, dos a dos, por sus hipotenusas, habremos dividido el hexágono original en 18 regiones iguales.





Como tenemos 19 puntos, en alguna de estas regiones debe haber al menos 2 puntos. Para ver que estos dos puntos están como mucho a distancia $\sqrt{3}/3$, sólo hay que probar que dicha región está inscrita en una circunferencia de diámetro $\sqrt{3}/3$.

Pero la circunferencia circunscrita a un triángulo rectángulo es la que tiene como diámetro la hipotenusa, por tanto, nuestra región está inscrita en una circunferencia de diámetro d, donde d es la hipotenusa de cualquiera de los dos triángulos rectángulos que la componen. Sólo hay que demostrar que $d \leq \sqrt{3}/3$. Para ello basta observar que la altura del triángulo equilátero de lado 1 es, por el teorema de Pitágoras, $\sqrt{1 - 1/4} = \sqrt{3}/2$, y de aquí se tiene, por cómo divide el baricentro a una mediana, $\sqrt{3}/2 = d + d/2$. De donde $d = \sqrt{3}/3$.

Problema 3.4. Halla todas las ternas de números enteros positivos $a \leq b \leq c$ primitivas (es decir, que no tengan ningún factor primo común) tales que cada uno de ellos divide a la suma de los otros dos.

Solución Problema 3.4

Supongamos que $a = b$. Como a y b no tienen factores en común, debe ser $a = b = 1$. Como c divide a $a + b = 2$, esto da lugar a las ternas $(1, 1, 1)$ y $(1, 1, 2)$.

Supongamos ahora que $a < b$. Como c divide a $a + b < c + c = 2c$, debe ser $a + b = c$. Pero entonces, como b divide a $a + c = 2a + b$, se sigue que b divide a $2a$, y como b no tiene factores comunes con a, b divide a 2. b no puede ser 1 ya que es mayor que a, luego la única terna posible en este caso es $(1, 2, 3)$.

Problema 3.5. Halla todas las ternas (x, y, z) de números reales que son soluciones del sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} 3 \cdot 2^y - 1 = 2^x + 2^{-x}, \\ 3 \cdot 2^z - 1 = 2^y + 2^{-y}, \\ 3 \cdot 2^x - 1 = 2^z + 2^{-z}. \end{array}\right\}$$

Solución Problema 3.5 Haciendo la sustitución $2^x = a$, $2^y = b$, y $2^z = c$, se observa que $a, b, c > 0$ y se obtiene

$$\left.\begin{array}{r} b = \frac{1}{3}(a + 1 + \frac{1}{a}), \\ c = \frac{1}{3}(b + 1 + \frac{1}{b}), \\ a = \frac{1}{3}(c + 1 + \frac{1}{c}). \end{array}\right\}$$

Aplicando la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica, resulta

$$b = \frac{1}{3}(a + 1 + \frac{1}{a}) \geq \sqrt[3]{a \cdot 1 \cdot \frac{1}{a}} = 1,$$

y por tanto $b \geq 1/b$. Análogamente, $a \geq 1,\ a \geq 1/a$, y $c \geq 1,\ c \geq 1/c$. Teniendo en cuenta lo anterior, de la primera ecuación resulta que

$$b = \frac{1}{3}(a + 1 + \frac{1}{a}) \leq \frac{1}{3}(a + a + a) = a$$

y de las otras dos que $c \leq b$ y $a \leq c$. Combinando las desigualdades anteriores, se obtiene $a \leq c \leq b \leq a$. Es decir, $a = b = c$.

Ahora tenemos

$$a = \frac{1}{3}(a + 1 + \frac{1}{a}) \Leftrightarrow 2a^2 - a - 1 = (a-1)(2a+1) = 0$$

que tiene por solución $a = 1$ y $a = -1/2$. Como sólo nos vale la solución positiva, tenemos que $a = b = c = 1$ y por tanto, $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ es la única terna solución del sistema.

Otra solución Problema 3.5. Haciendo la sustitución $2^x = a$, $2^y = b$, y $2^z = c$, se observa que $a, b, c > 0$, y se obtiene:

$$\left.\begin{array}{r} 3b - 1 = a + \frac{1}{a}, \\ 3c - 1 = b + \frac{1}{b}, \\ 3a - 1 = c + \frac{1}{c}. \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} a(3b-1) = a^2 + 1, \\ b(3c-1) = b^2 + 1, \\ c(3a-1) = c^2 + 1. \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} 3ab = a^2 + a + 1, \\ 3bc = b^2 + b + 1, \\ 3ca = c^2 + c + 1. \end{array}\right\}$$

Observemos que como $a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2 \geq 0$, se tiene $a^2 + 1 \geq 2a$, luego la primera ecuación implica $3ab \geq 3a$, de donde $b \geq 1$. Análogamente, de las otras dos ecuaciones se tiene $c \geq 1$ y $a \geq 1$.

Supongamos que a es el menor de los tres valores a, b, c (los otros casos son análogos). En particular, $0 < a \leq b$. Entonces se tiene $a^2 + a + 1 = 3ab \geq 3a^2$, luego $2a^2 \leq a + 1$. La función $2x^2$ sólo puede ser menor o igual que la función $x + 1$ si $x \leq 1$. Por tanto $a \leq 1$, y así se tiene $a = 1$.

La primera ecuación queda entonces $3b = 3$, luego $b = 1$. Y de la segunda ecuación se sigue que $c = 1$. Por tanto, $2^x = 2^y = 2^z = 1$, y así la única terna posible es $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

Problema 3.6. En una reunión entre cuatro países de la ONU, digamos A, B, C y D, el país A tiene el doble de representantes que el B, el triple que el C, y el cuádruple que el D. Se pretende distribuir a los representantes en mesas con el mismo número de personas en cada una. Sólo hay una condición: en cada mesa, cualquiera de los países debe estar en inferioridad numérica respecto de los otros tres juntos. ¿Cuántos representantes debe haber en cada mesa, como mínimo?

Solución Problema 3.6 La respuesta es 25. Veamos la demostración. Sean a, b, c y d el número de representantes de cada país. Como a debe ser múltiplo de 3 y de 4, también debe ser múltiplo de 12. Por tanto, existe un número k tal que $a = 12k$, luego $b = 6k$, $c = 4k$ y $d = 3k$. El número total de representantes es entonces $25k$.

Si llamamos M al número de mesas, y P al número de personas en cada mesa, tenemos $MP = 25k$.

Sea a_i el número de representantes del país A en la mesa número i. La condición impuesta nos dice que $a_i < \frac{P}{2}$, o bien $2a_i < P$. Como a_i es un número entero, esto implica que $2a_i \leq P - 1$. Sumando todos los a_i, se obtiene:

$$24k = 2a = 2a_1 + \cdots + 2a_M \leq M(P-1) = 25k - M.$$

De aquí se deduce $M \leq k$. Por tanto, como $MP = 25k$, deducimos finalmente que $P \geq 25$.

Sólo queda demostrar que, en efecto, se puede conseguir una configuración en la que haya 25 personas en cada mesa. Pero esto se consigue, por ejemplo, con una sola mesa en la que haya 12 representantes del país A, 6 del B, 4 del C y 3 del D.