XLVII Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Soluciones a los problemas propuestos

Problema 2.1. Se considera el polinomio de segundo grado $p(x) = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$, cuyas raíces x_1 y x_2 se suponen distintas. Justifica que para que $p(x_1^3) = p(x_2^3)$ es suficiente que $a^2 + 3ac - b^2 = 0$. ¿Es también necesaria esta condición?

Solución Problema 2.1

$$p(x_1^3) - p(x_2^3) = a(x_1^6 - x_2^6) + b(x_1^3 - x_2^3) = (x_1^3 - x_2^3)[a(x_1^3 + x_2^3) + b]$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = \left(-\frac{b}{a}\right)^3 - 3\frac{c}{a}\left(-\frac{b}{a}\right) = -\frac{b^3}{a^3} + \frac{3bc}{a^2}$$

Por tanto

$$p(x_1^3) - p(x_2^3) = (x_1^3 - x_2^3)\left[a\left(-\frac{b^3}{a^3} + \frac{3bc}{a^2}\right) + b\right] = \frac{b}{a^2}(x_1^3 - x_2^3)(-b^2 + 3ac + a^2)$$

Para que esta diferencia se anule, es suficiente que $-b^2 + 3ac + a^2 = 0$.

La condición no es necesaria. El producto se anula al anularse cualquier factor; el primer paréntesis no se anula, pero b puede anularse. De modo que otra condición suficiente para que $p(x_1^3) = p(x_2^3)$ es que $b = 0$.

Problema 2.2. Denotemos $\mathbf{N}^* = \{0, 1, 2, 3, ...\}$. Encuentra todas las funciones crecientes $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}^*$ con las siguientes propiedades:

i) $f(2) = 2$,

ii) $f(nm) = f(n) + f(m)$ para todo par $n, m \in \mathbf{N}$.

Solución Problema 2.2 De las propiedades se deduce:

1. Haciendo $m = 1$, sigue de ii) $f(1) = 0$.
2. Por inducción finita sobre ii) sigue que $f(n^k) = kf(n), \ \forall n, k \in \mathbf{N}$.

Veamos si puede construirse una función creciente con estas propiedades. Ya que $f(4) = f(2^2) = 2\,f(2) = 4$, resulta que los únicos posibles valores de $f(3)$ si f es creciente, son $f(3) = 2$, $f(3) = 3$, $f(3) = 4$.

1. Si $f(3) = 2$, nos encontramos con que $2^3 < 3^2$, pero $f(2^3) = 6 > f(3^2) = 4$.
2. Si $f(3) = 3$, nos encontramos con que $2^{11} < 3^7$, pero $f(2^{11}) = 22 > f(3^7) = 21$.
3. Si $f(3) = 4$, nos encontramos con que $3^3 < 2^5$, pero $f(3^3) = 12 > f(2^5) = 10$.

Así pues, no hay ninguna función creciente con estas propiedades.

Problema 2.3. Un cuadrado C se recubre completamente con un número entero de cuadrados de lado unidad, sin solapamientos. Si uno coloca dentro de C y sin solapamientos tantos cuadrados como sea posible de área 2, con los lados paralelos a los lados de C, se puede cubrir las ocho novenas partes del área del cuadrado. Determina todas las posibles dimensiones de tales cuadrados.

Solución Problema 2.3 Sea l el lado del cuadrado y n el número máximo de cuadrados de área 2 que caben en cada lado del cuadrado. l y n son enteros. Las condiciones del problema son que

$$\left\{ \begin{array}{c} 2n^2 = \frac{8}{9}l^2 \\ l^2 < 2(n+1)^2 \end{array} \right.$$

Poniendo $n = 2n'$ y $l = 3l'$ (que tienen que ser enteros, por la primera ecuación anterior), resulta sustituyendo que

$$\left\{ \begin{array}{c} n' = l' \\ n'^2 - 8n' - 2 < 0 \end{array} \right.$$

de modo que $1 \leq n' \leq 8$. Las posibles soluciones son, pues,

$$\left\{ \begin{array}{ccc} n' = l' = 1 & n = 2 & l = 3 \\ n' = l' = 2 & n = 4 & l = 6 \\ n' = l' = 3 & n = 6 & l = 9 \\ n' = l' = 4 & n = 8 & l = 12 \\ n' = l' = 5 & n = 10 & l = 15 \\ n' = l' = 6 & n = 12 & l = 18 \\ n' = l' = 7 & n = 14 & l = 21 \\ n' = l' = 8 & n = 16 & l = 24 \end{array} \right.$$

Problema 2.4. Consideremos un alfabeto de n letras, con el que formaremos palabras. Diremos que una palabra contiene un palíndromo si un trozo de esa palabra, de más de una letra, se lee igual al derecho que al revés. Por ejemplo, la palabra OLIMPIADAS contiene el palíndromo ADA. Siendo k un entero mayor que 2, determina cuántas palabras de longitud k se pueden formar, con nuestro alfabeto de n letras, que no contengan ningún palíndromo de longitud impar.

Solución Problema 2.4 Observemos que una palabra contiene un palíndromo de longitud impar si y sólo si contiene un palíndromo de longitud 3. Por tanto, sólo hay que contar las palabras que no contengan un palíndromo de longitud 3.

Podemos enumerar todas las palabras pedidas, de la siguiente manera: para la primera letra tenemos n posibilidades. Para la segunda letra también tenemos n posibilidades. La tercera letra puede ser cualquiera menos la letra que está en la posición 1. Por tanto, para la tercera letra tenemos $n - 1$ posibilidades. La cuarta letra puede ser cualquiera menos la que está en la posición 2, por lo que tamibén tenemos $n - 1$ posibilidades. Así llegaremos hasta la k-ésima letra, que puede ser cualquiera menos la que está en la posición $k - 2$, y por tanto también hay $n - 1$ posibilidades. Por tanto, en total hay $n^2(n-1)^{k-2}$ palabras que no contienen un palíndromo de longitud impar.

Problema 2.5. Se ordenan los números naturales en forma de tabla triangular, es decir:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 2 & 3 & 4 & & \\ & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \end{array}$$

. . . .

Diremos que la posición de un número N en la tabla viene dada por dos "coordenadas": el primer número de su fila y el primer número de su columna. Por ejemplo, si $N = 15$, su posición es $(10, 9)$. Cuando un número N, en la posición (n, m), verifica que $N = n+m$ diremos que N *está bien colocado* en la tabla; así 12 y 14 están bien colocados en la tabla y 15 no lo está. ¿Está 2^{2011} bien colocado?

Solución Problema 2.5

En cada fila hay dos números más que en la anterior: en la primera fila hay 1 número, en la segunda fila hay 3, en la tercera fila hay 5,así sucesivamente, en la n-ésima fila hay $2n - 1$ elementos. Por tanto, el último elemento de la fila n-ésima es: $1 + 3 + 5 + \cdot + (2n - 1) = n^2$, por la suma de los elementos de una progresión aritmética. El primer elemento de la fila $(n + 1)$-ésima es $n^2 + 1$ y el último $(n + 1)^2$.

Supongamos que N está bien colocado.

- Si N esté en la mitad derecha de la tabla triangular, incluida la "altura", su posición es (m^2+1, n^2), luego $N = n^2 + m^2 + 1$. Tomando restos módulo 4, como $n^2 \equiv 0, 1 \pmod 4$, $m^2 \equiv 0, 1 \pmod 4$, se tiene que $N \equiv 1, 2, 3 \pmod 4$. Como $2^{2011} \equiv 0 \pmod 4$, se llega a una contradicción.

- Si N está en la mitad izquierda de la tabla, excluida la "altura", su posición es $(m^2 + 1, n^2 + 1)$, luego $N = n^2 + m^2 + 2$. Razonando como antes, solo en los casos de m y n impares puede conseguirse que $m^2 \equiv 1$, $n^2 \equiv 1$ y así $N \equiv 0$. En ese caso $m = 2p + 1$, $n = 2q + 1$, luego

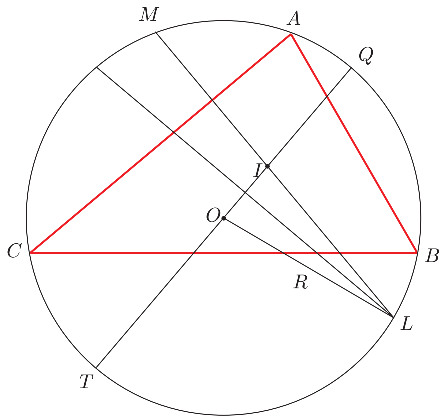
$$N = (2p + 1)^2 + (2q + 1)^2 + 2 = 4(p^2 + p + q^2 + q + 1)$$

  Si $N = 2^{2011}$, se tiene $2^{2009} = p^2 + p + q^2 + q + 1$. Como $p^2 + p$ y $q^2 + q$ son siempre números pares, encontramos una contradicción.

Problema 2.6.

En un triángulo llamaremos O al circuncentro, I al incentro y r al radio de la circunferencia inscrita. Si la mediatriz del segmento OI corta a la circunferencia circunscrita en L, y LI vuelve a cortarla en M, demuestra que $IM = 2r$.

Solución Problema 2.6



Por el Teorema de Euler, $(OI)^2 = R^2 - 2rR$. Sean T y Q los puntos de corte de la recta OI con la circunferencia circunscrita. Entonces tenemos

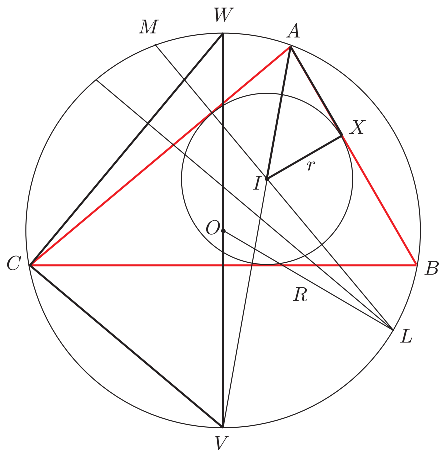
$$IL \cdot IM = IT \cdot IQ.$$

Por simetría, $IL = OL = R$. Por otra parte, $IT = OI + OT = OI + R$, y también tenemos $IQ = OQ - OI = R - OI$. Por tanto, sustituyendo en la ecuación anterior, se obtiene:

$$R \cdot IM = (R + OI)(R - OI) = R^2 - (OI)^2 = 2rR,$$

de donde $IM = 2r$.

Otra solución del Problema 2.6. Llamemos α, β y γ los ángulos del triángulo ABC.



Sea V el otro punto de corte de la recta AI con la circunferencia circunscrita. Considerando las cuerdas AV y LM, que se cortan en I, se tiene $AI \cdot IV = LI \cdot IM$. Como $LI = LO = R$ por simetría, esto significa que $AI \cdot IV = IM \cdot R$. Por tanto, probar que $IM = 2r$ es equivalente a probar que $AI \cdot IV = 2rR$.

Tracemos el triángulo AIX, rectángulo en X, donde el ángulo en A es $\alpha/2$. Sea ahora W el punto diametralmente opuesto a V en la circunferencia circunscrita. Observemos que el triángulo WVC es rectángulo (al ser WV un diámetro de la circunferencia circunscrita, que contiene a C). Además al ser ángulos inscritos que determinan la misma cuerda, se tiene $\angle CWV = \angle CAV = \alpha/2$.

Por tanto, los triángulos rectángulos AIX y WVC son semejantes. Esto implica que $WV/VC = AI/IX$, esto es $2R/VC = AI/r$, de donde $2rR = AI \cdot VC$. Por tanto, debemos probar que $AI \cdot IV = AI \cdot VC$. Es decir, debemos probar que $IV = VC$.

Para ello consideremos el triángulo CVI. Su ángulo en C es igual a $\gamma/2 + \angle VCB = \gamma/2 + \angle VAB = \gamma/2 + \alpha/2$. Por otra parte, su ángulo en I es igual a $\angle CIV = 180° - \angle CIA = 180° - (180° - \alpha/2 - \gamma/2) = \alpha/2 + \gamma/2$. Este triángulo es pues isósceles, con lo que se tiene $VC = VI$, como queríamos demostrar.