SOLUCIONES DE LA 48ª OME

1. Determinar razonadamente si el número $\lambda_n = \sqrt{3n^2 + 2n + 2}$ **es irracional para todo entero no negativo** n.

SOLUCIÓN. Supongamos que n es par. Entonces, $3n^2 + 2n$ es múltiplo de 4 y $3n^2 + 2n + 2$ es múltiplo de 2 pero no de 4, con lo que no puede ser un cuadrado perfecto.
Supongamos que n es impar. Cualquier cuadrado perfecto impar da resto 1 al dividir entre 8; este resultado se demuestra trivialmente, escribiendo el cuadrado de cualquier entero impar $2m+1$ en la forma $4m(m+1)+1$ y observando que, bien m, bien $m+1$, ha de ser par. Se tiene entonces que si n es impar y $3n^2 + 2n + 2$ fuera un cuadrado perfecto, entonces $3n^2 + 2n + 2$ daría resto 1 al dividir entre 8, o equivalentemente, $2n$ daría resto $1 - 2 - 3 = -4$ al dividir entre 8, con lo que $2n$ sería múltiplo de 4 y n par, contradicción. Luego para cualquier entero, positivo o negativo, $3n^2 + 2n + 2$ es un entero que no es un cuadrado perfecto, por tanto λ_n es siempre irracional para cualquier entero n, positivo o negativo.
Nótese también que λ_n es siempre real, incluso cuando n es un entero negativo, pues $3n^2 + 2n + 2 > (n+1)^2 \geq 0$.

2. Hallar todas las funciones $f : R \to R$ **de variable real con valores reales, tales que**

$$(x-2)\, f(y) + f(y + 2\, f(x)) = f(x + y\, f(x)) \qquad (1)$$

para todo $x, y \in R$.

SOLUCIÓN. Supongamos primeramente que $f(0) = 0$. Haciendo $x = 0$ en (1), $f(y) = 0$ para todo $y \in R$. Esta función satisface la ecuación funcional dada (1).
Sea $f(0) \neq 0$. Haciendo $y = 0$ en (1), se obtiene $(x-2) f(0) + f(2 f(x)) = f(x)$ para todo $x \in R$. Claramente esto implica que f es inyectiva porque si $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $(x_1 - 2) f(0) + f(2 f(x_1)) = f(x_1) = (x_2 - 2) f(0) + f(2 f(x_2)) = f(x_2)$ y por tanto $(x_1 - x_2)\, f(0) = 0$ y $x_1 = x_2$.
Poniendo ahora $x = 2$ en (1), $f(y + 2 f(2)) = f(2 + y f(2))$ para todo $y \in R$. Al ser f inyectiva $y + 2 f(2) = 2 + y f(2)$ para todo $y \in R$. En esta igualdad si $y = 0$, $f(2) = 1$. Al ser inyectiva $f(3) \neq 1$; por tanto con $x = 3$ e $y = \dfrac{3}{1 - f(3)}$ se llega a

$f\left(\dfrac{3}{1-f(3)}+2f(3)\right)=0.$ Hemos de demostrar que f tiene un cero. Sea $a,$ tal que $f(a)=0.$ Poniendo ahora $y=a$ en (1) resulta $f(a+2f(x))=f(x+af(x))$ para todo $x\in R.$ Así por la inyectividad de $f,$ $a+2f(x)=x+af(x)$ para todo $x\in R.$ Como $a\neq 2,$ $f(x)=\dfrac{x-a}{2-a}.$ Sustituyendo esta función en (1) resulta que $a=1,$ lo que proporciona dos únicas soluciones de la ecuación funcional inicial $f(x)=0$ y $f(x)=x-1.$

3. Sean x y n enteros tales que $1\le x<n.$ Disponemos de $x+1$ cajas distintas y $n-x$ bolas idénticas. Llamamos $f(n,x)$ al número de maneras que hay de distribuir las $n-x$ bolas en las $x+1$ cajas. Sea p número primo, encontrar los enteros n mayores que 1 para los que se verifica que el número primo p es divisor de $f(n,x)$ para todo $x\in\{1,2,...,n-1\}.$

SOLUCIÓN. Claramente $f(n,x)$ es el número de combinaciones con repetición de $x+1$ elementos tomados de $n-x$ en $n-x.$ Es decir,

$$f(n,x)=CR(x+1,n-x)=\binom{(x+1)+(n-x)-1}{n-x}=\binom{n}{x}.$$

Vamos a probar que los n buscados son todos los de la forma p^a con a entero positivo. Sea m_p la p-parte del entero positivo $m,$ es decir si $m=p^aq$ (con $q\ge 1$ entero), $m_p=p^a$, siendo $a\ge 1$ entero. Ahora probaremos el siguiente resultado previo:

Si $m_p=p^a,$ entonces $(m-i)_p=i_p$ para cada $i\in\{1,2,...,p^a-1\}.$

En efecto, si $i_p=p^k$ entonces $k<a$ y es obvio que $p^k\,|\,(m-i),$ luego $i_p\le(m-i)_p.$ Recíprocamente, si $(m-i)_p=p^k,$ ha de ser $k<a$ porque si no sería $p^a\,|\,i.$ Ahora, $p^k\,|\,i$ porque $p^k\,|\,m$ y $p^k\,|\,(m-i).$ Es decir $(m-i)_p\le i_p.$

A continuación probaremos que si p es primo y n un entero mayor que 1. Entonces p divide a $\binom{n}{x}$ para todo $x\in\{1,2,...,n-1\}$ si y sólo si $n=p^a$ con a entero.

Si $p\left|\binom{n}{x}\right.$ para todo $x\in\{1,2,...,n-1\},$ $p\left|\binom{n}{1}\right.=n.$ Poniendo $n_p=p^a,$ se tiene:

$$\binom{n}{p^a}=\frac{n(n-1)...(n-p^a+1)}{p^a\left(p^a-1\right)...2\cdot 1}$$

y por el resultado previo concluimos que la $p-$parte de $\binom{n}{p^a}$ es 1, luego $n=p^a.$

Recíprocamente, si $n=p^a$, para cada $x\in\{1,2,...,p^a-1\},$

$$\binom{n}{x}=\frac{p^a\,(p^a-1)...(p^a-x+1)}{x\left(x-1\right)...2\cdot 1}$$

y de nuevo por el resultado previo, la $p-$parte de $\binom{n}{x}$ es $\frac{p^a}{x_p}$, que es múltiplo de p por ser $x < p^a$.

4. Hallar todos los números enteros positivos n y k, tales que $(n+1)^n = 2n^k + 3n + 1$.

SOLUCIÓN. Para $n = 1$, la ecuación se escribe 2 = 6, claramente falsa. Luego $n \geq 2$. Por la fórmula del binomio de Newton,

$$(n+1)^n - 1 = n^2 + \binom{n}{2}n^2 + \binom{n}{3}n^3 + \ldots$$

es múltiplo de n^2. Tenemos entonces dos casos a analizar:

- k = 1. Entonces, n^2 divide a $2n^1+3n = 5n$, es decir, n divide a 5, con lo que $n = 5$, y la ecuación se convierte en $6^5=26$, claramente falsa.
- $k \geq 2$. Entonces, n^2 divide a $2n^k + 3n$, pero como divide a $2n^k$, también ha de dividir a $3n$, es decir, n divide a 3, con lo que $n=3$. Se comprueba fácilmente que para $n = 3$, la ecuación se convierte en $4^3 = 2\times 3^k + 10$, luego en $3^k = 27 = 3^3$, que es cierta si y sólo si $k = 3$.

5. Una sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ se define mediante la recurrencia

$$a_1 = 1,\ a_2 = 5,\ a_n = \frac{a_{n-1}^2 + 4}{a_{n-2}},\ \textbf{para}\ n \geq 3.$$

Demostrar que todos los términos de la sucesión son números enteros y encontrar una fórmula explícita para a_n.

SOLUCIÓN. Observamos a partir de la definición que $a_k a_{k-2} = a_{k-1}^2 + 4$ y $a_{k+1}a_{k-1} = a_k^2 + 4$. Restando a la segunda ecuación de la primera, resulta

$$a_{k+1}a_{k-1} - a_k a_{k-2} = a_k^2 - a_{k-1}^2 \Leftrightarrow a_{k-1}^2 + a_{k-1}a_{k+1} = a_k^2 + a_k a_{k+2},$$

que es equivalente a su vez a $a_{k-1}(a_{k-1} + a_{k+1}) = a_k(a_k + a_{k-2})$. Haciendo que $3 \leq k \leq n$, se obtienen

$$\begin{gathered}
a_2(a_2 + a_4) = a_3(a_3 + a_1),\\
a_3(a_3 + a_5) = a_4(a_4 + a_2),\\
a_4(a_4 + a_6) = a_5(a_5 + a_3),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_{n-2}(a_{n-2} + a_n) = a_{n-1}(a_{n-1} + a_{n-3}),\\
a_{n-1}(a_{n-1} + a_{n+1}) = a_n(a_n + a_{n-2}).
\end{gathered}$$

Multiplicando las igualdades anteriores y simplificando términos, resulta

$a_2(a_{n-1}+a_{n+1})=a_n(a_1+a_3)$ y teniendo en cuenta que $a_1=1, a_2=5$ y $a_3=20,$ resulta $a_{n+1}=6a_n-a_{n-1}$. De este modo es inmediato que todos los términos de la sucesión son enteros.

Para encontrar una formula explícita de a_n ensayamos con $a_n=t^n$ con lo que obtenemos a partir de la última expresión que

$$t^{n+1}-6t^n-t^{n-1}=0 \Leftrightarrow t^{n-1}(t^2-6t+1)=0.$$

Se tienen tres soluciones. La primera $t=0,$ que no cumple con el enunciado. Las otras dos $t=3\pm 2\sqrt{2}$ combinadas linealmente, sí lo harán. Es decir la solución que buscamos es de la forma $a_n=\lambda\left(3-2\sqrt{2}\right)^n+\mu\left(3+2\sqrt{2}\right)^n,\ \lambda,\mu\in R.$

Para determinar las constantes λ y μ utilizamos que $a_1=1$ y $a_2=5$ y tenemos

$$\begin{cases}\lambda(3-2\sqrt{2})+\mu(3+2\sqrt{2})=1\\ \lambda(3-2\sqrt{2})^2+\mu(3+2\sqrt{2})^2=5\end{cases}.$$

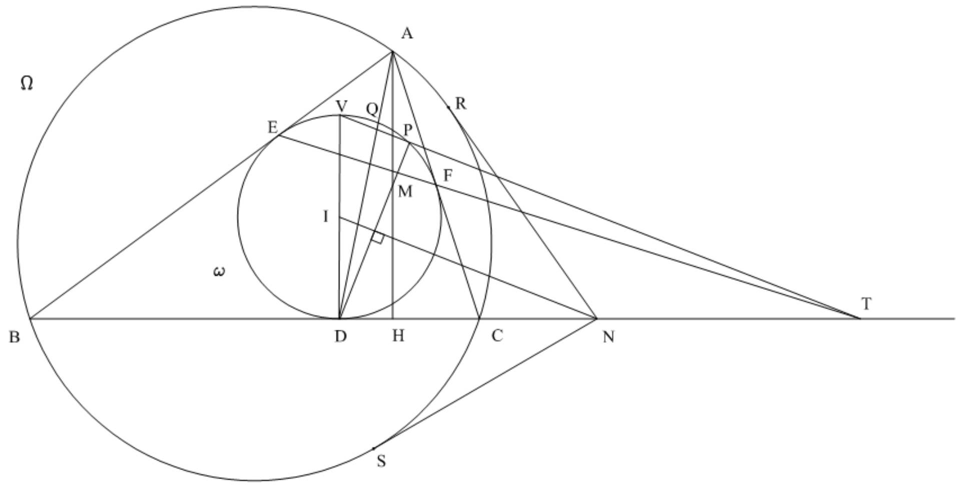
Resolviendo este sistema $\lambda=\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$ y $\mu=\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$, con lo que

$$a_n=\frac{2+\sqrt{2}}{4}\left(3-2\sqrt{2}\right)^n+\frac{2-\sqrt{2}}{4}\left(3+2\sqrt{2}\right)^n.$$

6. Sea ABC un triángulo acutángulo, ω su circunferencia inscrita de centro I, Ω su circunferencia circunscrita de centro O, y M el punto medio de la altura AH, donde H pertenece al lado BC. La circunferencia ω es tangente a este lado BC en el punto D. La recta MD corta a ω en un segundo punto P, y la perpendicular desde I a MD corta a BC en N. Las rectas NR y NS son tangentes a la circunferencia Ω en R y S respectivamente. Probar que los puntos R, P, D y S están en una misma circunferencia.

SOLUCIÓN. Supongamos que $b=c$. Entonces, el pie de la altura H coincide con el punto de tangencia D, luego DM es perpendicular a BC y N no está definido. Asumiremos entonces sin pérdida de generalidad que $b>c$. Sea U el punto de la recta BC cuya potencia es la misma respecto de ω y Ω. Claramente, hay exactamente dos tangentes a cada una de ambas circunferencias que pasan por U, siendo D el punto de tangencia de una de ellas con ω; llamemos E al punto de tangencia con ω de la segunda recta que pasa por U. La distancia de U a los cuatro puntos de tangencia es la misma, luego existe una circunferencia de centro U que pasa por los cuatro puntos, es decir, si demostramos que $U=N$, el problema quedaría resuelto. Ahora bien, el eje radical de la circunferencia descrita con centro U y ω, es claramente la recta DE y la perpendicular a esta recta por I es la mediatriz de la cuerda DE, luego pasa por U. Basta entonces con demostrar que el punto W de la altura AH cuya potencia es la misma respecto a la circunferencia de centro U por D y por E, y respecto a ω, es el punto medio de AH, con lo que sería $P=E$ y $N=U$. Ahora bien, dicha potencia es

$$UD^2-UW^2=ID^2-IW^2$$



Pero $UW^2 = UH^2 + WH^2$, $IW^2 = (WH - ID)^2 + HD^2$, con lo que la anterior condición es equivalente a

$$UD^2 - 2WH \cdot ID = UH^2 - HD^2 = UD(UD - 2HD), \qquad WH = \frac{HD \cdot UD}{ID},$$

y el problema se reduce a demostrar que esta última expresión es la mitad de la altura. Llamando s al semiperímetro de ABC, tenemos que $BD = s - b, CD = s - c$, $BH = c\cos B$, y al estar U definido como el punto sobre BC tal que su potencia es la misma respecto de ω y Ω, y llamando Σ al área de ABC y usando la fórmula de Herón para la misma, tenemos

$$UD^2 = (UD - BD)(UD + CD), \qquad UD = \frac{BD \cdot CD}{CD - BD} = \frac{(s-b)(s-c)}{b-c} = \frac{\Sigma^2}{s(b-c)(s-a)}.$$

Luego

$$WH = \frac{h}{2}\frac{a(s - b - c\cos B)}{(b-c)(s-a)} = \frac{h}{2}\frac{\left(a(a+b+c) - 2ab - a^2 - c^2 + b^2\right)}{(b-c)(b+c-a)} =$$

$$= \frac{h}{2}\frac{\left(ac - ab - c^2 + b^2\right)}{(b-c)(b+c-a)} = \frac{h}{2},$$

como queríamos demostrar.