XLVIII Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Primera sesión

Sábado mañana, 17 de diciembre de 2011

1. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo y P un punto interior. Determinar qué condiciones deben cumplir el cuadrilátero y el punto P para que los cuatro triángulos PAB, PBC, PCD y PDA tengan la misma área.

2. Sean a, b y c las longitudes de los lados de un triángulo ABC. Si

$$b(a+b)(b+c) = a^3 + b(a^2+c^2) + c^3,$$

demostrar que la medida (en radianes) de los ángulos A, B y C cumple la relación

$$\frac{1}{\sqrt{A}+\sqrt{B}} + \frac{1}{\sqrt{B}+\sqrt{C}} = \frac{2}{\sqrt{A}+\sqrt{C}}.$$

3. Tenemos una colección de esferas iguales que apilamos formando un tetraedro cuyas aristas tienen todas n esferas. Calcular, en función de n, el número total de puntos de tangencia (contactos) entra las esferas del montón.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.

XLVIII Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Segunda sesión

Sábado tarde, 17 de diciembre de 2011

4. Hallar todas las funciones reales continuas $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ que cumplen, para todo x real positivo, la condición

$$x + \frac{1}{x} = f(x) + \frac{1}{f(x)}$$

5. Consideremos el número entero positivo

$$n = 2^r - 16^s$$

donde r y s son también enteros positivos. Hallar las condiciones que deben cumplir r y s para que el resto de la división de n por 7 sea 5. Hallar el menor número que cumple esta condición.

6. Los puntos A_1, A_2, $\ldots$, A_{2n} son los vértices de un polígono regular de $2n$ lados. Hallar el número de ternas A_i, A_j, A_k tales que el triángulo $A_iA_jA_k$ es rectángulo y el número de ternas tales que el triángulo es acutángulo.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.