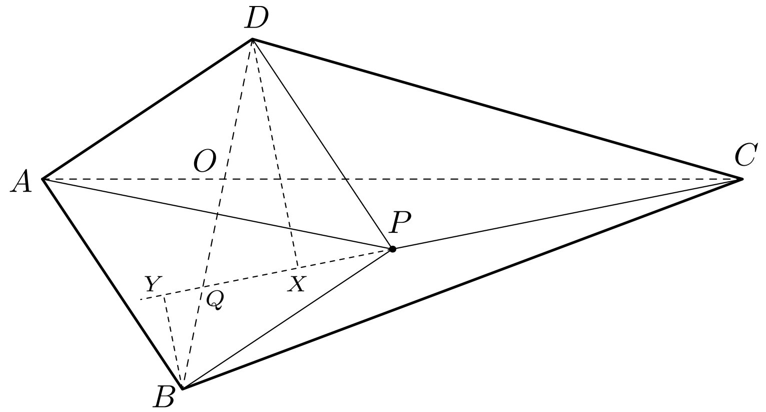
C1.

Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo y P un punto interior. Determina cuáles son las condiciones que deben cumplir el cuadrilátero y el punto P para que los cuatro triángulos PAB, PBC, PCD i PDA tengan la misma área.

Solución.

Consideremos, primero, los triángulos PCD y PCB. Tienen la base común PC y alturas correspondientes DX y BY. Si queremos que tengan la misma área, las alturas deben ser iguales. Por lo tanto, el punto Q tiene que ser el punto medio de la diagonal BD. La recta CP debe pasar per Q. Análogamente, consideremos los triángulos ADP y PAB de base común AP. Por el mismo argumento de antes, han de tener altures iguales y AP tiene que pasar per Q. De ahí que AP y CP tienen dos puntos comunes: P y Q. Los segmentos AP y PC está, pues, alineados. Es decir, son la diagonal AC.
Es pues necesario que las dos diagonales se corten en el punt medio de una de ellas. Pero mirando los triángulos PDA y PDC, que tienen la misma área, resulta que P tiene que ser el punto medio de AC.
La condición pedida es que las diagonales del cuadrilátero se corten en el punto medio de una de ellas y el punto P sea el punto medio de la otra.



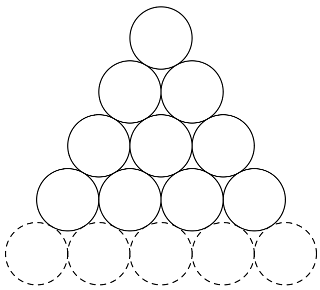
C2.

Tenemos una colección de esferas iguales que apilaamos formando un tetraedro cuyas aristas tienen todas n esferas. Calcula, en función de n, el número total de puntos de tangencia (contactos) que hay entre las esferas del montón.

Solución.

El problema en el plano.

Analicemos primero el problema en el cas plano. Sea A_n el número de contactos de n esferes colocadas en un triángulo plano con n esferas en cada uno de los lados (figura de la derecha). Fijémonos que el número total de esferas es, evidentemente, $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$.



Podemos proceder por inducción. Si hay $n = 2$ filas el número de contactos es 3; es decir, $A_2 = 3$. Observemos que coincide con el número de bolas del triángulo de dos filas.

En un triángulo de $n-1$ filas hay A_{n-1} contactos. Obviamente, en un triángulo de n files habrá los contactos que ya había en un triángulo de $n-1$ filas , más los que provengan de añadir la última fila, tal como está indicado en la figura anterior. Pero está claro que, al añadir esta última fila se producen contactos de dos tipos:

• Los que hay entre las bolas de la fila n-ésima, que son $n-1$.

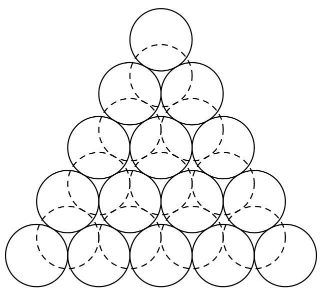
• Los que tienen las bolas de la fila n-ésima con la anterior. Son $2(n-1)$.

Así pues, $A_n = A_{n-1} + 3(n-1)$, o bien, $A_n - A_{n-1} = 3(n-1)$. Sumando queda

$$A_n = 3\big((n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1\big) = 3\frac{n(n-1)}{2} = 3T_{n-1}.$$

El problema en el espacio tridimensional.

Ahora ya podemos analizar el caso en el espacio. Sea C_n el número de contactos de un montón tetraédrico de esferas con aristas de n esferes. En la figura de la derecha hemos representado las esferas de la base en trazo continuo y las del piso inmediato superior en trazo discontinuo, a vista de pájaro. Cuando añadimos el piso n-ésimo, añadimos contactos de dos tipos:



• Los propios del piso – un triángulo plano de n boles de lado.

• Los que provienen de contactos entre el piso $n-1$ y el piso n.

Los contactos del primer tipo son, como hemos visto en el cas plano, $A_n = 3T_{n-1}$.
El número de contactos entre un piso y el anterior es $3T_{n-1}$, ya que cada bola del piso $n-1$ toca exactamente tres boles del piso n. (Véase la figura.) En total, pues, el número de contactos es $C_n - C_{n-1} = A_n + 3T_{n-1} = 3n(n-1)$. Si sumamos queda

$$C_n - C_2 = 3n(n-1) + \cdots + 3 \cdot 3(3-1) = 3(n^2 + \cdots + 3^2) - 3(n + \cdots + 3),$$

o bien

$$C_n = 3(n^2 + \cdots + 2^2 + 1^2) - 3(n + \cdots + 2 + 1) = 3\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 3\frac{n(n+1)}{2} = n^3 - n.$$

Otro camino. La recurrencia $C_n = C_{n-1} + 3n(n-1)$ se puede resolver escribiendo C_n como un polinomio cúbico y calculando sus coeficientes a partir de la recurrencia y de la condición inicial $C_1 = 0$.
Si ponemos $C_n = an(n-1)(n-2) + bn(n-1) + cn + d$, la condición de recurrencia da $a = 1$, $b = 3$, $c = 0$, y la condición $C_1 = 0$ da $d = 0$. En resumen

$$C_n = n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) = n^3 - n.$$

C3.

Sean a, b i c las longitudes de los lados de un triángulo ABC. Si

$$b(a+b)(b+c) = a^3 + b(a^2+c^2) + c^3,$$

demuestra que les medidas de los ángulos $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ cumplen la relación

$$\frac{1}{\sqrt{A}+\sqrt{B}} + \frac{1}{\sqrt{B}+\sqrt{C}} = \frac{2}{\sqrt{C}+\sqrt{A}}.$$

.

Solución. La condición del enunciado se puede escribir en la forma

$$b^3 + b^2a + b^2c + abc - a^2b - bc^2 - a^3 - c^3 = 0$$

o, equivalentemente,

$$b^2(a+b+c) - (a^3+b^3+c^3-3abc) + b^3 - 2abc - a^2b - b^2c = 0.$$

Si sustituimos la identidad $a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$, se obtiene

$$b^2(a+b+c) - (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) + b(a+b+c)(b-a-c) = 0$$

o, lo que es lo mismo, $(a+b+c)(b^2-a^2-c^2-ac) = 0$. Puesto que $a+b+c \neq 0$, tiene que ser $b^2-a^2-c^2-ac = 0$, de donde, por el teorema del coseno, resulta que

$$\frac{b^2-a^2-c^2}{2ac} = \frac{1}{2} = \cos B$$

Por lo tanto, $B = \pi/3$. Sabemos que $A+B+C = \pi$ i de esto resulta $A+C = 2\pi/3 = 2B$. Es decir, los ángulos A, B, C estan en progresión aritmética. Pero la igualdad que hay que demostrar equivale, precisamente, a que A, B, C estén en progresión aritmética. Efectivamente, si suponemos que $B = A+d$ y $C = A+2d$ con $d \geq 0$, tenemos

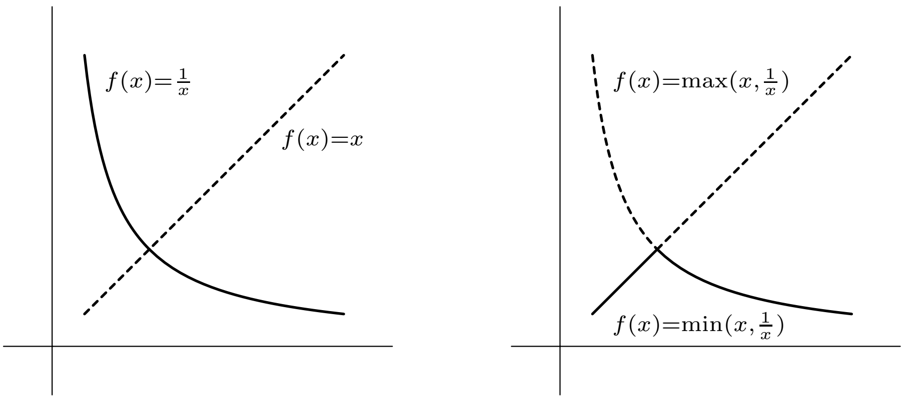
$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{A}+\sqrt{B}} + \frac{1}{\sqrt{B}+\sqrt{C}} &= \frac{\sqrt{B}-\sqrt{A}}{B-A} + \frac{\sqrt{C}-\sqrt{B}}{C-B} \\ &= \frac{\sqrt{C}-\sqrt{A}}{d} = \frac{C-A}{d(\sqrt{C}+\sqrt{A})} = \frac{2}{\sqrt{C}+\sqrt{A}}\end{aligned}$$

Si fuese $d = 0$, el triángulo seria equilátero y el enunciado se cumpliria trivialmente.

D1.-
Hallar todas las funciones reales continuas $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ que cumplen, para todo x real positivo, la condición
$$x + \frac{1}{x} = f(x) + \frac{1}{f(x)}.$$

Solución.
Escribimos
$$x - f = \frac{1}{f} - \frac{1}{x} = \frac{x - f}{xf}$$
de donde sale
$$(x - f)\Big(1 - \frac{1}{xf}\Big) = 0.$$

De aquí resulta que, para cada $a > 0$, será, o bien $f(a) = a$, o bien $f(a) = \dfrac{1}{a}$.
Las funciones de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}^+$ definidas por $f(x) = x$ y por $f(x) = 1/x$ cumplen la condición, pero también la cumplen las funciones
$$\max(x, \frac{1}{x}) \quad \text{y} \quad \min(x, \frac{1}{x}).$$
ya que las curvas $f(x) = x$ y $f(x) = 1/x$ se cortan en $(1, 1)$ y solamente en este punto.



Observación. Un razonamiento más fino para deducir que estas funciones son las únicas continuas es el siguiente. Sea f una función que cumple las condiciones del enunciado y supongamos que en el intervalo $(0, 1)$ tomase valores x y $1/x$. Sea α el supremo de los $x < 1$ tales que $f(x) = x$. Si α fuese estrictamente menor que 1, la función tendría una discontinuidad en él. Luego $\alpha = 1$ y la función no puede saltar de x a $1/x$ en el intervalo $(0, 1)$. Análogamente se hace a la derecha del 1.

D2.-
Consideremos el número entero positivo

$$n = 2^r - 16^s$$

donde r y s son también enteros positivos. Hallar las condiciones que deben cumplir r y s para que el resto de la división de n por 7 sea 5. Hallar el menor número que cumple esta condición.

Solución.
Los restos obtenidos al dividir las potencias de 2 por 7 son $\{1, 2, 4, 1, 2, 4, \ldots\}$, repitiéndose con periodo 3. Estos mismos restos se obtienen al dividir 16 por 7. Luego la única posibilidad para obtener resto 5 al restar es que

$$r = \dot{3} + 1 \quad \text{y} \quad s = \dot{3} + 2.$$

Estas son las condiciones pedidas.
Para hallar el mínimo positivo n escribimos

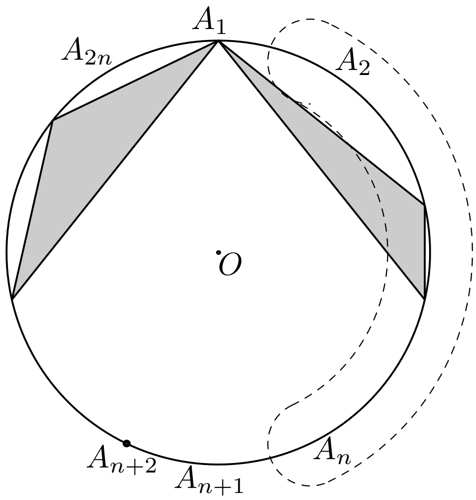
$$n = 2^{3k+1} - 16^{3h+2} = 2^{3k+1} - 2^{12h+8}.$$

Deberá ser $2k + 1 > 12h + 8$ (la función 2^x es creciente) equivalente a $2k - 12h - 7 > 0$. El mínimo se obtendrá cuando $2k - 12h - 7$ sea mínimo (la función 2^x es convexa), y se ve fácilmente que este mínimo se obtiene para $k = 3$ y $h = 0$ y resulta

$$n = 2^{10} - 2^8 = 768.$$

D3.-
Los puntos A_1, A_2, ... , A_{2n} son los vértices de un polígono regular de $2n$ lados. Hallar el número de ternas A_i, A_j, A_k tales que el triángulo $A_iA_jA_k$ es rectángulo y el número de ternas tales que el triángulo es acutángulo.

Solución.
Al ser $2n$ par, podremos formar triángulos rectángulos que tendrán la hipotenusa sobre los n diámetros del polígono. Para cada diámetro fijado, el ángulo recto del triángulo rectángulo puede ser cualquiera de los $2n-2$ vértices sobrantes. En total habrá $R_n = n(2n-2) = 2n(n-1)$ triángulos rectángulos.



Para calcular los acutángulos podemos calcular ahora los obtusángulos y restar del total. Observemos que cualquier triángulo obtusángulo dejará el centro O (su circuncentro) fuera de él. Si lo giramos en sentido directo o inverso alrededor de O podemos conseguir que uno de sus vértices agudos esté en A_1. Los otros dos están, bien en el conjunto $\{A_2, \ldots, A_n\}$, bien en $\{A_{n+2}, \ldots, A_{2n}\}$. El número buscado será $2\binom{n-1}{2}$. Como esto lo podemos hacer con cada uno de los $2n$ vértices, quedarán $2(2n)\binom{n-1}{2}$ triángulos. Pero cada triángulo lo hemos contado dos veces, una para cada vértice agudo.
Luego el número de triángulos obtusángulos será $O_n = 2n\binom{n-1}{2}$.
El número de los acutángulos será el número total $\binom{2n}{3}$ menos los rectángulo y obtusángulos.

$$A_n = \binom{2n}{3} - R_n - O_n = \cdots \text{calculando} \cdots = \frac{n(n-1)(n-2)}{3} = 2\binom{n}{3}.$$

Solución alternativa. Fijemos un vértice agudo en un vértice del polígono, por ejemplo, el A_1. Los tres lados del triángulo abarcarán respectivamente x, y y z lados del polígono de $2n$ lados. Será $x + y + z = 2n$. Al ser los tres ángulos agudos deberá ser $0 < x, y, z < n$. Calculemos el número de soluciones enteras positivas de la ecuación $x + y + z = 2n$ con la condición fijada para la z.
Si $z = 1$, queda $x + y = 2n - 1$ que no tiene soluciones. Si $z = 2$, queda $x + y = 2n - 2$ que tiene 1 solución. Si $z = 3$, queda $x + y = 2n - 3$ que tiene 2 soluciones. Etc. Si $z = n - 1$, queda $x + y = n + 1$ que tiene $n - 2$ soluciones.
En total hay $(n-2) + \cdots + 2 + 1 = \frac{(n-2)(n-1}{2} = \binom{n-1}{2}$ soluciones con un ángulo en A_1.
Si consideramos las otras posibles posiciones para dicho ángulo queda en total $2n\binom{n-1}{2}$.
Pero hemos contado cada triángulo tres veces, luego queda

$$A_n = \frac{n(n-1)(n-2)}{3} = 2\binom{n}{3}.$$