

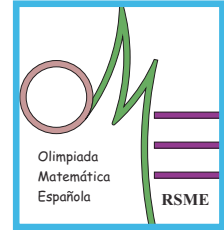


L Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Primera sesión

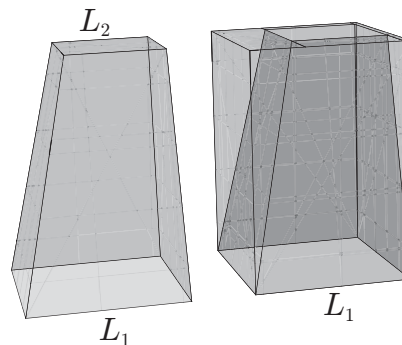
Sábado mañana, 18 de enero de 2014



1. Sean a, b números positivos. Probar que

$$a + b \geq \sqrt{ab} + \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

2. Encontrar las tres últimas cifras del número 7^{2014}
3. De un prisma recto de base cuadrada, con lado de longitud L_1 , y altura H , extraemos un tronco de pirámide, no necesariamente recto, de bases cuadradas, con lados de longitud L_1 (para la inferior) y L_2 (para la superior), y altura H . Las dos piezas obtenidas aparecen en la imagen siguiente:



Si el volumen del tronco de pirámide es $2/3$ del total del volumen del prisma, ¿cuál es el valor de L_1/L_2 ?

**No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.**

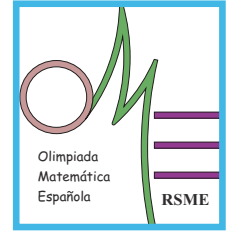


L Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Segunda sesión

Sábado tarde, 18 de enero de 2014



4. Hallar para qué valores del número real a todas las raíces del polinomio, en la variable x ,

$$x^3 - 2x^2 - 25x + a$$

son números enteros.

5. Sean x e y números reales entre 0 y 1. Probar que

$$x^3 + xy^2 + 2xy \leq 2x^2y + x^2 + x + y$$

6. Consideramos un número primo p . Debemos diseñar un torneo de p -parchís sujeto a las siguientes reglas:

- En el torneo participan p^2 jugadores.
- En cada partida juegan p jugadores.
- El torneo se divide en rondas. Las rondas se dividen en partidas. Cada jugador juega una, o ninguna, partida en cada ronda.
- Al final del torneo cada jugador se ha enfrentado exactamente una vez con cada uno de los otros jugadores.

Determinar si es posible diseñar un torneo así. En caso afirmativo, obtener el mínimo número de rondas que puede tener el torneo.

**No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.**