Problemas Primera Sesion

1 *Los enteros positivos x, y, z cumplen*

$$x + 2y = z, \qquad x^2 - 4y^2 + z^2 = 310.$$

Halla todos los posibles valores del producto xyz.

Solución 1. Podemos despejar $2y$ de la primera ecuación y sustituir en la segunda, con lo que ha de cumplirse

$$310 = x^2 - (z - x)^2 + z^2 = 2zx, \qquad zx = 155 = 5 \cdot 31.$$

Luego al ser $5, 31$ primos, se tiene que z ha de tomar uno de los valores $155, 31, 5, 1$, tomando x respectivamente los valores $1, 5, 31, 155$. Como además $z = x + 2y > x$, los dos últimos casos quedan descartados. En los dos primeros casos, se tiene que $y = \frac{z-x}{2}$ toma respectivamente los valores 77 y 13, resultando respectivamente en

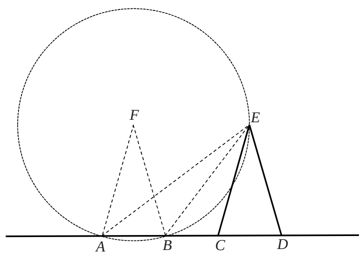
$$xyz = 1 \cdot 77 \cdot 155 = 11935, \qquad xyz = 5 \cdot 13 \cdot 31 = 2015.$$

Solución 2. Como $x^2 - 4y^2 = (x - 2y)(x + 2y) = z(x - 2y)$, tenemos que z ha de dividir a $310 - z^2$, luego a 310. Además, z no puede ser par, pues en ese caso x también lo sería, y $x^2 - 4y^2 + z^2$ sería múltiplo de 4, pero 310 no lo es. Luego z ha de dividir a $155 = 5 \cdot 31$, es decir, z ha de tomar uno de los valores $1, 5, 31, 155$. Como $z = x + 2y$, con x, y enteros positivos, es imposible que $z = 1$, y si $z = 5$, entonces bien $x = 3$, $y = 1$, bien $x = 1$, $y = 2$, que obviamente no satisfacen la segunda ecuación. Se tiene entonces que $z = 31$ o $z = 155$, tomando entonces respectivamente $2y - x = \frac{z^2-310}{z}$ los valores 21 y 153, que junto a $2y + x = z$, nos permite hallar los mismos valores de x, y que por el método anterior, bastando multiplicarlos para hallar los dos mismos valores del producto xyz.

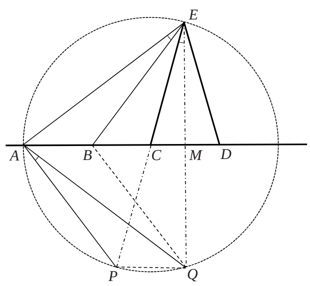
□

2 *En una recta tenemos cuatro puntos A, B, C y D, en ese orden, de forma que $AB = CD$. E es un punto fuera de la recta tal que $CE = DE$. Demuestra que $\angle CED = 2\angle AEB$ si y sólo si $AC = EC$.*

Solución 1. Sea F el punto tal que los triángulos ABF y CDE son iguales. Claramente un triángulo es el otro desplazado por AC, luego $EF = AC$ y $AF = CE = DE = BF$. Trazamos la circunferencia de centro F que pasa por A y B, y como $\angle AFB = \angle CED$, por ser el ángulo central el doble del inscrito, $\angle AEB = 2\angle CED$ si y sólo si E está sobre la circunferencia que acabamos de trazar, es decir, si y sólo si $EF = AF$, y esto es equivalente a $AC = EC$.



Solución 2. Sean M el punto medio de CD, P el simétrico de E respecto de C, y Q el simétrico de E respecto de la recta CD.



El triángulo EPQ es el resultado de aplicar a ECM una homotecia de centro E y razón 2, con lo que EPQ es claramente rectángulo en Q, con $PQ = 2CM = CD = AB$, siendo además PQ paralelo a CD, luego a AB. Se tiene entonces que EP es diámetro de la circunferencia circunscrita a EPQ, que tiene por lo tanto centro en C y radio CE. Al mismo tiempo, al ser $ABQP$ paralelogramo por ser $AB = PQ$ paralelos, AP es paralela a BQ, que es la simétrica de BE respecto a AD, mientras que AP es la simétrica de AE respecto a AD, luego $\angle PAQ = \angle AEB$. Se tiene entonces que $\angle CED = 2\angle AEB$ y $CE = CA$ son ambos equivalentes a $\angle PAQ = \angle PEQ$, luego equivalentes entre sí, como queríamos demostrar.

Solución 3. Notemos en primer lugar que sólo es necesario demostrar que si $AC = EC$, entonces $\angle CED = 2\angle AEB$. Para ello, consideremos que A está a la izquierda de D sobre la recta horizontal AD, y AB está en una posición tal que $\angle AEB$ es la mitad de $\angle CED$. Si ahora desplazamos E hacia la derecha (equivalente a desplazar AB hacia la izquierda), $\angle AEB$ decrece (nos basta con considerar la circunferencia circunscrita a AEB en su posición inicial, y observar que E "sale" de la circunferencia). De forma análoga, si desplazamos E hacia la izquierda (equivalente a desplazar AB hacia la derecha), $\angle AEB$ crece (E "entra" en la circunferencia circunscrita a AEB). Luego existe a lo sumo una posición de AB sobre la recta AD a la izquierda de CD, tal que $\angle CED = 2\angle AEB$, y nos basta con demostrar que cuando $AC = EC$, AB está de hecho en tal posición.
Sea entonces un sistema de coordenadas con centro en C y tal que el eje horizontal coincide con la recta por A, B, C, D. Denotando por R a la distancia EC, y llamando $\angle CED = 2\alpha$ (con lo que α es claramente agudo), se tiene que $AB = CD = 2R\sin\alpha$, $A \equiv (-R, 0)$ por ser $AC = EC$, $B \equiv (-R+2R\sin\alpha, 0)$ y $E \equiv (R\sin\alpha, R\cos\alpha)$. Ahora bien,

$$\overrightarrow{AE} \equiv (R + R\sin\alpha, R\cos\alpha), \qquad \overrightarrow{BE} \equiv (R - R\sin\alpha, R\cos\alpha),$$

con lo que

$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BE} = R^2 - R^2\sin^2\alpha + R^2\cos^2\alpha = 2R^2\cos^2\alpha,$$

$$\left|\overrightarrow{AE}\right| = \sqrt{R^2 + 2R^2\sin\alpha + R^2\sin^2\alpha + R^2\cos^2\alpha} = R\sqrt{2 + 2\sin\alpha},$$

$$\left|\overrightarrow{AE}\right| = \sqrt{R^2 - 2R^2\sin\alpha + R^2\sin^2\alpha + R^2\cos^2\alpha} = R\sqrt{2 - 2\sin\alpha},$$

y como

$$\sqrt{2 + 2\sin\alpha} \cdot \sqrt{2 - 2\sin\alpha} = 2\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = 2\cos\alpha,$$

tenemos que

$$\cos\angle AEB = \frac{\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BE}}{\left|\overrightarrow{AE}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BE}\right|} = \frac{2R^2\cos^2\alpha}{2R^2\cos\alpha} = \cos\alpha,$$

y queda concluída la demostración.
También es posible completar la demostración sin realizar la observación inicial, tomando $A \equiv (-d, 0)$, donde hemos de demostrar que $d = AC$ si y sólo si $\cos\angle AEB = \cos\alpha$. La segunda condición se traduce, tras algo de álgebra, en la relación

$$\left(d^2 - R^2\right)\left(d^2 + R^2 + 2R^2\cos(2\alpha)\right)\sin^2\alpha = 0,$$

donde el segundo y el tercer factores son claramente positivos (usamos para ello que $d > R$ para que B esté a la izquierda de C), con lo que esta relación es en efecto equivalente a $d = R$, como queríamos demostrar.

$\square$

3 *Halla todas las ternas de reales positivos (x, y, z) que cumplan el sistema*

$$2x\sqrt{x+1} - y(y+1) = 1,$$

$$2y\sqrt{y+1} - z(z+1) = 1,$$
$$2z\sqrt{z+1} - x(x+1) = 1.$$

Solución 1. Nótese que, por la desigualdad entre medias aritmética y geométrica, se tiene que

$$x^2 + x + 1 \geq 2\sqrt{x^2(x+1)} = 2x\sqrt{x+1},$$

con igualdad si y sólo si $x^2 = x + 1$, es decir si y sólo si x es una raíz de la ecuación $r^2 - r - 1 = 0$. Se tiene entonces de la primera ecuación que

$$y^2 + y + 1 = 2x\sqrt{x+1} \leq x^2 + x + 1,$$

y de forma similar para las otras dos, con lo que

$$x^2 + x + 1 \geq y^2 + y + 1 \geq z^2 + z + 1 \geq x^2 + x + 1,$$

con lo que se ha de dar la igualdad en las tres desigualdades, es decir, x, y, z son soluciones de la ecuación $r^2 - r - 1 = 0$. El producto de las dos raíces de esta ecuación es -1, luego exactamente una de ellas es negativa, y x, y, z son iguales entre sí e iguales a la raíz positiva, es decir, la única solución es

$$x = y = z = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Solución 2. Supongamos que $x < y$, luego de la primera ecuación obtenemos

$$2x\sqrt{x+1} = y^2 + y + 1 > x^2 + x + 1,$$

o tras elevar al cuadrado y reagrupar términos,

$$0 > x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = \left(x^2 - x - 1\right)^2,$$

claramente falso, luego $x \geq y$, con $x = y$ si y sólo si son iguales a la raíz positiva de $r^2 - r - 1 = 0$. De forma similar, obtenemos de la segunda ecuación que $y \geq z$, y de la tercera que $z \geq x$, con análogas condiciones de igualdad. Luego $x \geq y \geq z \geq x$, con igualdad si y sólo si x, y, z son la raíz positiva de la ecuación $r^2 - r - 1 = 0$, obteniéndose la misma única solución que por el método anterior.

□

Problemas Segunda Sesión

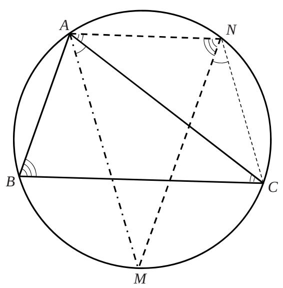
4. *Alrededor de una mesa circular están sentadas seis personas. Cada una lleva un sombrero. Entre cada dos personas hay una mampara de modo que cada una puede ver los sombreros de las tres que están enfrente, pero no puede ver el de la persona de su izquierda ni el de la de su derecha ni el suyo propio. Todas saben que tres de los sombreros son blancos y tres negros. También saben que cada una de ellas es capaz de obtener cualquier deducción lógica que sea factible. Empezamos por una de las seis personas y le preguntamos "¿puedes deducir el color de algún sombrero de los que no ves?". Una vez que ha respondido (todas oyen la respuesta), pasamos a la persona de su izquierda y le hacemos la misma pregunta, y así sucesivamente. Demuestra que una de las tres primeras responderá "Sí".*

Solución. Numeramos las personas en el orden en que van respondiendo, con lo que la persona 1 ve los sombreros de las personas $3, 4, 5$, la persona 2 los de las personas $4, 5, 6$, y la persona 3 los de las personas $5, 6, 1$.
Supongamos que ni la persona 1 ni la persona 2 han podido responder "Sí". Los sombreros de las personas $3, 4, 5$ no pueden ser todos del mismo color, porque si no la persona 1 sabría que todos los sombreros que no ve son del otro color. Si los sombreros de las personas $4, 5$ fueran del mismo color, entonces la persona 2 sabe que el sombrero 3 ha de ser del otro color, con lo que los sombreros $4, 5$ han de ser de distinto color. Pero entonces la persona 3 sabe que el color del sombrero 4, que no ve, es distinto al del sombrero 5, que sí ve. Luego o una de las dos primeras personas contesta "Sí", o si las dos primeras contestan "No", entonces la tercera contesta "Sí".

$\square$

5 *El triángulo ABC es isósceles en C, y sea Γ su circunferencia circunscrita. Sea M el punto medio del arco BC de Γ que no contiene a A, y sea N el punto donde la paralela a AB por M vuelve a cortar a Γ. Se sabe que AN es paralela a BC. ¿Cuáles son las medidas de los ángulos de ABC?*

Solución. Si AN es paralela a BC, entonces $ABCN$ es un trapecio con circunferencia circunscrita, y por lo tanto isósceles.



Se tiene entonces que $\angle ANC = \angle BAN$. Pero $\angle NAC = \angle ACB$ y $\angle ANM = \angle ABC$ por ser AN y BC paralelas, y ser AB y MN también paralelas. Tenemos entonces por una parte que $\angle BAN = \angle A + \angle C$. Finalmente, $\angle CNM = \angle CAM = \frac{1}{2}\angle A$ por ser M el punto medio del arco BC, siendo entonces AM la bisectriz de $\angle A$, con lo que $\angle ANC = \angle B + \frac{1}{2}\angle A$. Igualando ambos ángulos, y usando que $\angle A = \angle B$ por ser ABC isósceles en C, se tiene que $\angle A = \angle B = 2\angle C$, luego $180^\circ = \angle A + \angle B + \angle C = 5\angle C$, para $\angle C = 36^\circ$, y $\angle A = \angle B = 72^\circ$.

□

6 *Sean x, y, z reales positivos tales que $x+y+z = 3$. Halla el valor máximo alcanzado por*

$$\sqrt{x} + \sqrt{2y+2} + \sqrt{3z+6}.$$

¿Para qué valores de x, y, z se alcanza dicho máximo?

Solución 1. Consideremos los vectores $\left(\sqrt{x}, \sqrt{y+1}, \sqrt{z+2}\right)$ y $\left(\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}\right)$, cuyas coordenadas son todas reales y positivas, cuyos módulos respectivos son $\sqrt{x+y+z+3} = \sqrt{6}$ y $\sqrt{1+2+3} = \sqrt{6}$, y cuyo producto escalar es la expresión cuyo máximo se pide hallar. Por la desigualdad del producto escalar, el valor máximo es igual al producto de módulos de vectores, que es 6, dándose la igualdad cuando ambos vectores son proporcionales. En este caso, al tener ambos vectores el mismo módulo, se da la igualdad si y sólo si ambos vectores son iguales, es decir,

$$\sqrt{x} + \sqrt{2y+2} + \sqrt{3z+6} \leq 6,$$

con igualdad si y sólo si $x = y = z = 1$.

Solución 2. La función $f(x) = \sqrt{x}$ es cóncava, por lo tanto, por la desigualdad de Jensen, se tiene que

$$\sqrt{x} + \sqrt{2y+2} + \sqrt{3z+6} = f(x) + 2f\left(\frac{y+1}{2}\right) + 3f\left(\frac{z+2}{3}\right) \leq$$

$$\leq 6f\left(\frac{x+(y+1)+(z+2)}{6}\right) = 6f(1) = 6,$$

con igualdad si y sólo si $x = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{3}$, es decir, $y = 2x-1$ y $z = 3x-2$, con lo que $x+y+z = 6x-3 = 3$, o $x = y = z = 1$.

□