

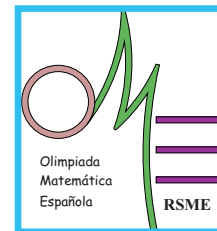


LI Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Primera sesión

Viernes mañana, 16 de enero de 2015



1. Demuestra que

$$(ax + by)^2 \leq ax^2 + by^2$$

para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ y cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ con $a + b = 1, a, b \geq 0$.
¿En qué casos se da la igualdad?

2. Sean r y s dos rectas paralelas, y A un punto fijo a igual distancia de ambas rectas. Para cada punto B de la recta r , sea C el punto de la recta s tal que $\widehat{BAC} = 90^\circ$, y sea P el pie de la perpendicular desde A sobre la recta BC . Demuestra que, independientemente de qué punto B de la recta r tomemos, el punto P está sobre una circunferencia fija.
3. Un campeonato de baloncesto se ha jugado por sistema de liga a dos vueltas (cada par de equipos se enfrentan dos veces) y sin empate (si el partido acaba en empate hay prórrogas hasta que gane uno de los dos). El ganador del partido obtiene 2 puntos y el perdedor 1 punto. Al final del campeonato, la suma de los puntos obtenidos por todos los equipos salvo el campeón es de 2015 puntos. ¿Cuántos partidos ha ganado el campeón?

**No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.**

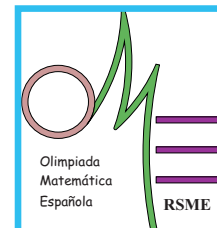


LI Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Segunda sesión

Viernes tarde, 16 de enero de 2015



4. Los enteros positivos x, y, z cumplen

$$x + 2y = z, \quad x^2 - 4y^2 + z^2 = 310$$

Halla todos los posibles valores del producto xyz .

5. En una recta tenemos cuatro puntos A, B, C y D , en ese orden, de forma que $AB = CD$. El punto E es un punto fuera de la recta tal que $CE = DE$. Demuestra que

$$\widehat{CED} = 2\widehat{AEB}$$

si y sólo si $AC = EC$.

6. Halla todas las ternas de reales positivos (x, y, z) que cumplan el sistema

$$\begin{cases} 2x\sqrt{x+1} - y(y+1) = 1 \\ 2y\sqrt{y+1} - z(z+1) = 1 \\ 2z\sqrt{z+1} - x(x+1) = 1 \end{cases}$$

**No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.**