LII Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Primera sesión

Sábado mañana, 16 de enero de 2016

1. Para pertenecer a un club cada nuevo socio debe pagar como cuota de inscripción a cada miembro del club la misma cantidad que él tuvo que pagar en total cuando ingresó más un euro. Si el primer socio pagó un euro, ¿cuanto deberá pagar en total el n-ésimo socio?

2. Dos circunferencias C y C' son secantes en dos puntos P y Q. La recta que une los centros corta a C en R y a C' en R', la que une P y R' corta a C en $X \neq P$ y la que une P y R corta a C' en $X' \neq P$. Si los tres puntos X, Q, X' están alineados se pide:

i) Hallar el ángulo $\angle XPX'$.

ii) Demostrar que $(d+r-r')(d-r+r') = rr'$, donde d es la distancia entre los centros de las circunferencias y r y r' sus radios.

3. Encontrar cuántas soluciones enteras tiene la ecuación

$$|5 - x_1 - x_2| + |5 + x_1 - x_2| + |5 + x_2 + x_3| + |5 + x_2 - x_3| = 20$$

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.

LII Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Segunda sesión

Sábado tarde, 16 de enero de 2016

4. Encontrar la solución entera más pequeña de la ecuación

$$\left\lfloor \frac{x}{8} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{40} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{240} \right\rfloor = 210$$

(Si x es un número real, $\lfloor x \rfloor$ es la parte entera de x, esto es, el mayor número entero menor o igual que x.)

5. Sean C y C' dos circunferencias tangentes exteriores con centros O y O' y radios 1 y 2, respectivamente. Desde O se traza una tangente a C' con punto de tangencia en P' y desde O' se traza la tangente a C con punto de tangencia en P en el mismo semiplano que P' respecto de la recta que pasa por O y O'. Hallar el área del triángulo OXO', donde X es el punto de corte de $O'P$ y OP'.

6. Si n es un número natural, el n-ésimo número triangular es $T_n = 1+2+\cdots+n$. Hallar todos los valores de n para los que el producto de los 16 números triangulares consecutivos $T_n T_{n+1} \cdots T_{n+15}$ es un cuadrado perfecto.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.