S´abado ma˜nana, primera sesi´on

4, 1. Para pertenecer a un club cada nuevo socio debe pagar como cuota de inscripción a cada miembro del club la misma cantidad que él tuvo que pagar en total cuando ingresó más un euro. Si el primer socio pagó un euro, ¿cuanto deberá pagar en total el n-ésimo socio?

Solución. Sea a_n la cuota total del socio n-ésimo y sea $s_n = a_1 + \cdots + a_n$. El n-ésimo ($n \geq 2$) socio tiene que pagar en total $(a_1 + 1) + (a_2 + 1) + \cdots + (a_{n-1} + 1) = s_{n-1} + n - 1$ euros, luego $a_n = s_{n-1} + n - 1$ y

$$s_n = s_{n-1} + a_n = s_{n-1} + s_{n-1} + (n-1) = 2s_{n-1} + n - 1.$$

Iterando esta relación queda $s_n = 2^{n-1} + 2^{n-2} \times 1 + 2^{n-3} \times 2 + \cdots + 2 \times (n-2) + (n-1)$, de donde $s_n = 2s_n - s_n = 2^n + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \cdots + 2 - n + 1 = 2^n + 2^{n-1} - 1 - n$ y entonces, para $n \geq 2$,

$$a_n = s_n - s_{n-1} = 2^n - 2^{n-2} - 1 = 3 \times 2^{n-2} - 1.$$

5, 2. Dos circunferencias C y C' son secantes en dos puntos P y Q. La recta que une los centros corta a C en R y a C' en R', la que une P y R' corta a C en $X \neq P$ y la que une P y R corta a C' en $X' \neq P$. Si los tres puntos X, Q, X' están alineados se pide:

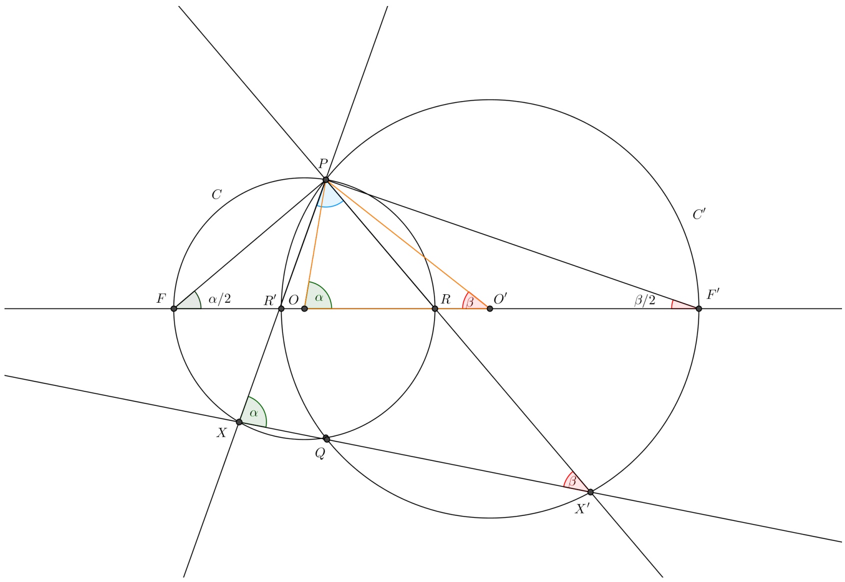
(i) hallar el ángulo $\angle XPX'$.

(ii) demostrar que $(d + r - r')(d - r + r') = rr'$, donde d es la distancia entre los centros de las circunferencias y r y r' sus radios.

Solución. (i) Sean F y F' los puntos diametralmente opuestos a R y R' en C y C', respectivamente. Por el Teorema del ángulo inscrito se tiene que $\angle PFQ = \angle PXQ = \alpha$ que, por simetría, es el doble de $\angle PFR$, luego $\angle PFR = \alpha/2$. Como el triángulo PFR es rectángulo en P (al ser FR diámetro de C), deducimos que $\angle PRF = \pi/2 - \alpha/2$. Similarmente, $\angle PR'F' = \pi/2 - \beta/2$, donde $\beta = \angle PX'Q$. Por otro lado, considerando el triángulo XPX', $\angle XPX' = \pi - \alpha - \beta$, luego sumando los ángulos del triángulo PRR',

$$(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}) + (\frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}) + (\pi - \alpha - \beta) = \pi,$$

es decir $\alpha + \beta = 2\pi/3$ y $\angle XPX' = \pi/3$.



(ii) Consideramos el triángulo OPO', donde O y O' son los centros de C y C', respectivamente. Nuevamente, por el Teorema del ángulo inscrito, el ángulo central $\angle POR$ es $2\angle PFR = \alpha$ y similarmente $\angle PO'R' = 2\angle PF'R' = \beta$, luego $\angle OPO' = \pi/3$. Los lados del triángulo OPO' son los radios r y r' y la distancia d entre los centros, por tanto el resultado se sigue directamente del Teorema del coseno: $d^2 = r^2 + r'^2 - rr'$, que es equivalente a la relación dada en el enunciado.

6, 3. Encontrar cuántas soluciones enteras tiene la ecuación

$$|5 - x_1 - x_2| + |5 + x_1 - x_2| + |5 + x_2 + x_3| + |5 + x_2 - x_3| = 20.$$

Solución. Podemos reescribir la ecuación en la forma

$$|y_1| + |y_2 - y_1| + |y_3 - y_2| + |20 - y_3| = 20, \tag{1}$$

donde $y_1 = 5 - x_1 - x_2$, $y_2 = 10 - 2x_2$ y $y_3 = 15 - x_2 + x_3$, por tanto toda solución entera de la ecuación original da una solución entera de (**??**) con y_2 un número par. Recíprocamente, es inmediato comprobar que toda solución de (**??**) con y_2 par, da una solución de la ecuación del enunciado. Observamos que (**??**) se puede escribir como

$$d(0, y_1) + d(y_1, y_2) + d(y_2, y_3) + d(y_3, 20) = d(0, 20),$$

donde $d(x, y) = |x - y|$ es la distancia entre los números reales x e y. Sólo puede darse esta situación si $0 \leq y_1 \leq y_2 \leq y_3 \leq 20$ (podemos imaginar una regla de carpintero con cuatro segmentos de longitudes que suman 20 unidades y que tienen que cubrir desde 0 a 20, que es una distancia de 20 unidades. La única posibilidad es que la regla esté completamente estirada). Se trata entonces de contar las ternas de números enteros $0 \leq y_1 \leq y_2 \leq y_3 \leq 20$ con y_2 par. Si escribimos $y_2 = 2k$ con $0 \leq k \leq 10$, hay $2k+1$ posibilidades para y_1 y $21 - 2k$ para y_3, luego el número de soluciones buscado es

$$\sum_{k=0}^{10}(2k+1)(21-2k) = \sum_{k=0}^{10}(21+40k-4k^2) = 21\times 11+40\times 55-4\times 385 = 891.$$

Por tanto el número de soluciones enteras de la ecuación dada es 891.

Sábado tarde, segunda sesión

4. Encontrar la solución entera más pequeña de la ecuación

$$\lfloor\frac{x}{8}\rfloor - \lfloor\frac{x}{40}\rfloor + \lfloor\frac{x}{240}\rfloor = 210.$$

(Si x es un número real, $\lfloor x\rfloor$ es la parte entera de x, esto es, el mayor número entero menor o igual que x.)

Solución. Sea x una solución entera de la ecuación. Dividiendo, primero por 240, luego el resto r_1 por 40 y el nuevo resto r_2 por 8, resulta

$$x = 240c_1 + r_1 = 240c_1 + 40c_2 + r_2 = 240c_1 + 40c_2 + 8c_3 + r_3,$$

donde $0 \le c_2 < 6$, $0 \le c_3 < 5$ y $0 \le r_3 < 8$ (las desigualdades para c_2 y c_3 se obtienen de $0 \le r_1 < 240$ y $0 \le r_2 < 40$). Entonces

$$210 = \lfloor \frac{x}{8} \rfloor - \lfloor \frac{x}{40} \rfloor + \lfloor \frac{x}{240} \rfloor = (30c_1 + 5c_2 + c_3) - (6c_1 + c_2) + c_1 = 25c_1 + 4c_2 + c_3,$$

y el único caso posible es $c_1 = 8$, $c_2 = 2$, $c_3 = 2$ (reduciendo módulo 5 queda $c_2 \equiv c_3 \pmod 5$ y necesariamente $c_2 = c_3$; entonces $42 = 5c_1 + c_2$ y tiene que ser $c_2 = 2$, $c_1 = 8$), con lo que

$$x = 240 \times 8 + 40 \times 2 + 8 \times 2 + r_3 = 2016 + r_3$$

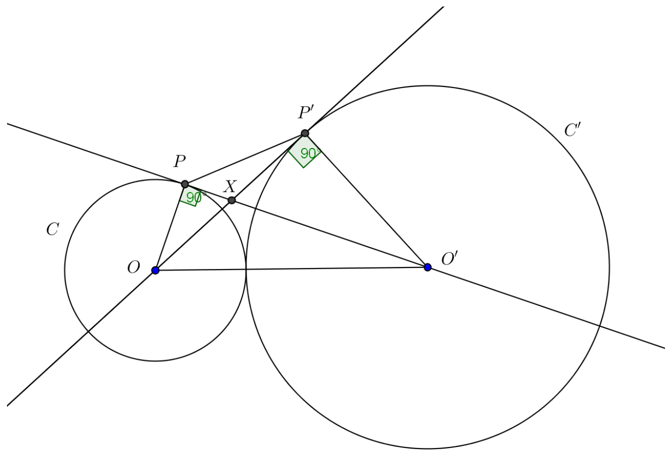
y la menor solución entera de la ecuación dada es $x = 2016$ (las otras son $2017, \ldots, 2023$).

5. Sean C y C' dos circunferencias tangentes exteriores con centros O y O' y radios 1 y 2, respectivamente. Desde O se traza una tangente a C' con punto de tangencia en P' y desde O' se traza la tangente a C con punto de tangencia en P en el mismo semiplano que P' respecto de la recta que pasa por O y O'. Hallar el área del triángulo OXO', donde X es el punto de corte de $O'P$ y OP'.

Solución. Los triángulos OPO' y $OP'O'$ son rectángulos en P y P', respectivamente y $\angle PXO = \angle P'XO'$, luego los triángulos PXO y $P'XO'$ son semejantes con razón de semejanza $O'P'/OP = 2$. La razón entre sus áreas S' y S es entonces $S'/S = 4$. Por el Teorema de Pitágoras $OP' = \sqrt{5}$ y $O'P = 2\sqrt{2}$, luego si A es el área pedida se tiene que

$$A + S' = \frac{1}{2} O'P' \cdot OP' = \sqrt{5}; \quad A + S = \frac{1}{2} OP \cdot O'P = \sqrt{2}.$$

De las relaciones anteriores se obtiene fácilmente que $A = \frac{4\sqrt{2} - \sqrt{5}}{3}$.



6. Si n es un número natural, el n-ésimo número triangular es $T_n = 1 + 2 + \cdots + n$. Hallar todos los valores de n para los que el producto de los 16 números triangulares consecutivos $T_n T_{n+1} \cdots T_{n+15}$ es un cuadrado perfecto.

Solución. Como $T_n = n(n+1)/2$, el producto de los 16 números triangulares es $P_n = nC_n(n+16)/2^{16}$, donde $C_n = (n+1)^2 \ldots (n+15)^2$ es un cuadrado perfecto. Entonces P_n es un cuadrado perfecto si y sólo si lo es $n(n+16)$. Como n y $n+16$ no tienen divisores impares comunes, para que $n(n+16)$ sea un cuadrado perfecto los primos impares que dividen a n y a $n+16$ deben aparecer elevados a un exponente par, de modo que podemos escribir $n = 2^a m^2$ y $n + 16 = 2^b t^2$ con $a, b = 0$ ó 1. Más aun, n y $n+16$ tienen la misma paridad, por tanto $a = b = 0$ ó $a = b = 1$. En el primer caso $t^2 = m^2 + 16$ y sólo puede ser $m = 3$, $t = 5$ (con $m \geq 7$ no puede haber soluciones porque la diferencia de dos cuadrados distintos ≥ 49 es mayor que 16 y, con $m \leq 6$, sólo hay la solución indicada), por lo que $n = 9$ y $n(n+16) = 9 \times 25$, que es un cuadrado. En el caso $a = b = 1$, resulta $t^2 = m^2 + 8$, cuya única solución es $m = 1$, $t = 3$, que corresponde a $n = 2$, valor para el que $n(n+16) = 36$ es un cuadrado. La respuesta es por tanto $n = 2$ y 9.