Viernes tarde, primera sesión

1. En la primera fila de un tablero 5×5 se colocan 5 fichas que tienen una cara blanca y otra negra, mostrando todas la cara blanca. Cada ficha se puede mover de una casilla a cualquiera de las contiguas (horizontal o verticalmente) dándole la vuelta en cada movimiento. Además, varias fichas pueden ocupar una misma casilla. ¿Se puede conseguir mediante una secuencia de movimientos que las 5 fichas queden en la última fila, en casillas distintas y que todas ellas muestren la cara negra?

Solución. Si pintamos las casillas del tablero alternativamente de blanco y negro como en un tablero de ajedrez, sucede que una ficha cuyo color visible coincida con el de la casilla, al moverse seguirá teniendo el mismo color que la nueva casilla (puesto que tanto el color de la ficha como el de la casilla cambian). Supuesto que la casilla superior izquierda la hemos dejado blanca, en el inicio hay 3 fichas cuyo color (blanco) coincide con el de la casilla. En todo momento deberá suceder que el color de tres fichas es el mismo que el de la casilla que ocupen (y el de las otras dos, diferente). Sin embargo, colocando las fichas con la cara negra en la última fila, resulta que sólo dos fichas tendrán el color (negro) de su casilla. Por lo tanto, no es posible colocar las fichas de esta manera.

2. Cada 20 minutos durante una semana se travasa una cantidad exacta de litros de agua (siempre la misma cantidad) desde un tanque con 25000 litros a otro depósito inicialmente vacío. Desde este segundo depósito, a intervalos regulares de tiempo, se extrae primero 1 litro, luego 2, luego 3, etc. Justo al final de la semana coinciden el último travase y la última extracción, quedando en ese momento vacío el segundo depósito. Determinar cuánta agua se ha extraído en total durante la semana, en caso de que los datos del problema lo permitan. (Se supone que los trasvases y las extracciones se realizan instantáneamente. El primer trasvase se hace pasados los primeros 20 minutos y la primera extracción, pasado el primer intervalo de tiempo.)

Solución. Sea n el número de extracciones de agua realizadas durante la semana. En total habrán extraído $T_n = 1+2+\cdots+n = n(n+1)/2$ litros. Por otro lado si el caudal que se trasvasa cada 20 minutos al segundo depósito es de k litros, el total de litros que ha entrado es $7\times24\times3\times k = 2^3\times3^2\times7\times k$, así que $2^3\times3^2\times7\times k = n(n+1)/2$ y esta cantidad tiene que ser ≤ 25000, por tanto $2^4\times3^2\times7\times k = n(n+1) \leq 50000$. Por la última desigualdad, $n \leq 223$. Ahora, los números n y $n+1$ son primos entre sí luego cada potencia 2^4, 3^2, 7 divide a n o a $n+1$. Ciertamente $2^4\times3^2\times7 = 1008$ no puede dividir a n ni a $n+1$, dado que $n \leq 223$. Supongamos que $n = 16c$ es múltiplo de 16. Entonces $n+1$ es múltiplo de 9 ó 7. En el primer caso se tendría $n+1 = 16c+1 \equiv 0 \pmod 9$, es decir, $c \equiv 5 \pmod 9$. Pero si $c = 5$, $n = 80$ y 7 no divide a 80×81 y, si $c \geq 5+9 = 14$, $n \geq 16\times14 = 224$. Por otro lado, en el segundo caso, $n+1 = 16c+1 \equiv 0 \pmod 7$, de donde $c \equiv 3 \pmod 7$. Pero 9 no divide al producto $n(n+1)$ si $c = 3$ ó 10, y si $c \geq 17$, $n > 223$. Concluimos que n no es múltiplo de 16 y $n+1$ sí. Si n es múltiplo de 9 y $n+1$ de 16×7, tendríamos $n = 16\times7\times c-1 \equiv 0 \pmod 9$, es decir, $c \equiv 7 \pmod 9$ y entonces $c \geq 7$ y $n > 223$. Similarmente, si n es múltiplo de 7 y $n+1$ de 16×9, $n = 16\times9\times c-1 \equiv 0 \pmod 7$, es decir, $c \equiv 2 \pmod 7$ y entonces $c \geq 2$ y $n > 223$. El único caso que queda es que n sea múltiplo de $9\times7 = 63$ y $n+1$ de 16. Entonces $n+1 = 63c+1 \equiv 0 \pmod{16}$ y $c \equiv 1 \pmod{16}$ y necesariamente $c = 1$ (si no $n > 223$). Por lo tanto sólo hay una solución posible, a saber, $n = 63$, lo que da un volumen total extraído de $T_{63} = 63\times64/2 = 2016$ litros.

3. Sea $n \geq 1$ y $P(x)$ un polinomio con coeficientes enteros que cumple que los números $P(1), P(2), \ldots, P(n)$ son $1, 2, \ldots, n$ (no necesariamente en este orden). Demostrar que uno de los números $P(0)$ o $P(n+1)$ es múltiplo de $n!$.

Solución. Si i y j son dos números enteros, se tiene que $i^k - j^k = (i-j)(i^{k-1}+i^{k-2}j+\cdots+ij^{k-2}+j^{k-1})$ es múltiplo de $i-j$. Entonces, si $P(x) = a_mx^m+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$,

$$P(i)-P(j) = a_m(i^m-j^m)+\cdots+a_2(i^2-j^2)+a_1(i-j)$$

también es múltiplo de $i-j$. En particular, $n-1$ divide a $P(n)-P(1)$. Como $P(1)$ y $P(n)$ son enteros distintos entre 1 y n tiene que ser $P(1) = 1$ y $P(n) = n$ o al revés, $P(1) = n$ y $P(n) = 1$. En el primer caso, $n-2 = (n-1)-1$ divide a $P(n-1)-P(1) = P(n-1)-1$ y $2 \leq P(n-1) \leq n-1$, luego tiene que ser $P(n-1) = n-1$ y, similarmente $P(n-2) = n-2$, etc.

De forma parecida se ve que en el segundo caso $P(n-1) = 2$, $P(n-2) = 3$, etc.

Si $P(i) = i$ para todo $1 \leq i \leq n$, todos estos números son raíces de $P(x) - x$, luego

$$P(x) = c(x)(x-1)(x-2)\dots(x-n) + x$$

para algún polinomio con coeficientes enteros $c(x)$. Por otro lado, si $P(i) = n - i + 1$ para todo $1 \leq i \leq n$, se tiene que todos los enteros $1 \leq i \leq n$ son raíces de $P(x) - n + x - 1$, luego

$$P(x) = c(x)(x-1)(x-2)\dots(x-n) + n - x + 1$$

para algún polinomio con coeficientes enteros $c(x)$. En el primer caso $P(0) = (-1)^n c(0) n!$ y, en el segundo, $P(n+1) = c(n+1)n!$, luego efectivamente $n!$ divide a $P(0)$ o a $P(n+1)$.

S´abado ma˜nana, segunda sesi´on

4, 1. Para pertenecer a un club cada nuevo socio debe pagar como cuota de inscripción a cada miembro del club la misma cantidad que él tuvo que pagar en total cuando ingresó más un euro. Si el primer socio pagó un euro, ¿cuanto deberá pagar en total el n-ésimo socio?

Solución. Sea a_n la cuota total del socio n-ésimo y sea $s_n = a_1 + \cdots + a_n$. El n-ésimo ($n \geq 2$) socio tiene que pagar en total $(a_1 + 1) + (a_2 + 1) + \cdots + (a_{n-1} + 1) = s_{n-1} + n - 1$ euros, luego $a_n = s_{n-1} + n - 1$ y

$$s_n = s_{n-1} + a_n = s_{n-1} + s_{n-1} + (n-1) = 2s_{n-1} + n - 1.$$

Iterando esta relación queda $s_n = 2^{n-1} + 2^{n-2} \times 1 + 2^{n-3} \times 2 + \cdots + 2 \times (n-2) + (n-1)$, de donde $s_n = 2s_n - s_n = 2^n + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \cdots + 2 - n + 1 = 2^n + 2^{n-1} - 1 - n$ y entonces, para $n \geq 2$,

$$a_n = s_n - s_{n-1} = 2^n - 2^{n-2} - 1 = 3 \times 2^{n-2} - 1.$$

5, 2. Dos circunferencias C y C' son secantes en dos puntos P y Q. La recta que une los centros corta a C en R y a C' en R', la que une P y R' corta a C en $X \neq P$ y la que une P y R corta a C' en $X' \neq P$. Si los tres puntos X, Q, X' están alineados se pide:

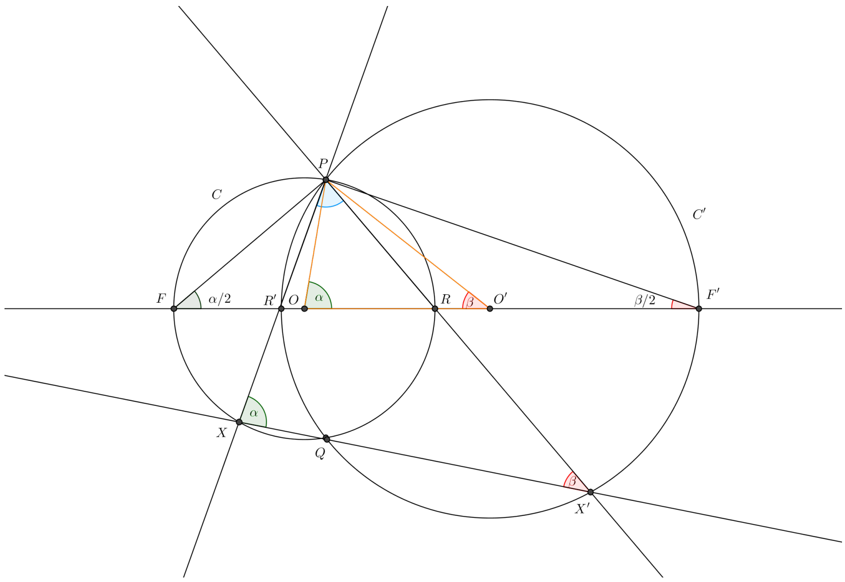
(i) hallar el ángulo $\angle XPX'$.

(ii) demostrar que $(d + r - r')(d - r + r') = rr'$, donde d es la distancia entre los centros de las circunferencias y r y r' sus radios.

Solución. (i) Sean F y F' los puntos diametralmente opuestos a R y R' en C y C', respectivamente. Por el Teorema del ángulo inscrito se tiene que $\angle PFQ = \angle PXQ = \alpha$ que, por simetría, es el doble de $\angle PFR$, luego $\angle PFR = \alpha/2$. Como el triángulo PFR es rectángulo en P (al ser FR diámetro de C), deducimos que $\angle PRF = \pi/2 - \alpha/2$. Similarmente, $\angle PR'F' = \pi/2 - \beta/2$, donde $\beta = \angle PX'Q$. Por otro lado, considerando el triángulo XPX', $\angle XPX' = \pi - \alpha - \beta$, luego sumando los ángulos del triángulo PRR',

$$(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}) + (\frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}) + (\pi - \alpha - \beta) = \pi,$$

es decir $\alpha + \beta = 2\pi/3$ y $\angle XPX' = \pi/3$.



(ii) Consideramos el triángulo OPO', donde O y O' son los centros de C y C', respectivamente. Nuevamente, por el Teorema del ángulo inscrito, el ángulo central $\angle POR$ es $2\angle PFR = \alpha$ y similarmente $\angle PO'R' = 2\angle PF'R' = \beta$, luego $\angle OPO' = \pi/3$. Los lados del triángulo OPO' son los radios r y r' y la distancia d entre los centros, por tanto el resultado se sigue directamente del Teorema del coseno: $d^2 = r^2 + r'^2 - rr'$, que es equivalente a la relación dada en el enunciado.

6, 3. Encontrar cuántas soluciones enteras tiene la ecuación

$$|5 - x_1 - x_2| + |5 + x_1 - x_2| + |5 + x_2 + x_3| + |5 + x_2 - x_3| = 20.$$

Solución. Podemos reescribir la ecuación en la forma

$$|y_1| + |y_2 - y_1| + |y_3 - y_2| + |20 - y_3| = 20, \tag{1}$$

donde $y_1 = 5 - x_1 - x_2$, $y_2 = 10 - 2x_2$ y $y_3 = 15 - x_2 + x_3$, por tanto toda solución entera de la ecuación original da una solución entera de (**??**) con y_2 un número par. Recíprocamente, es inmediato comprobar que toda solución de (**??**) con y_2 par, da una solución de la ecuación del enunciado. Observamos que (**??**) se puede escribir como

$$d(0, y_1) + d(y_1, y_2) + d(y_2, y_3) + d(y_3, 20) = d(0, 20),$$

donde $d(x, y) = |x - y|$ es la distancia entre los números reales x e y. Sólo puede darse esta situación si $0 \leq y_1 \leq y_2 \leq y_3 \leq 20$ (podemos imaginar una regla de carpintero con cuatro segmentos de longitudes que suman 20 unidades y que tienen que cubrir desde 0 a 20, que es una distancia de 20 unidades. La única posibilidad es que la regla esté completamente estirada). Se trata entonces de contar las ternas de números enteros $0 \leq y_1 \leq y_2 \leq y_3 \leq 20$ con y_2 par. Si escribimos $y_2 = 2k$ con $0 \leq k \leq 10$, hay $2k+1$ posibilidades para y_1 y $21 - 2k$ para y_3, luego el número de soluciones buscado es

$$\sum_{k=0}^{10}(2k+1)(21-2k) = \sum_{k=0}^{10}(21+40k-4k^2) = 21\times 11+40\times 55-4\times 385 = 891.$$

Por tanto el número de soluciones enteras de la ecuación dada es 891.