LII Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Primera sesión

Viernes tarde, 15 de enero de 2016

1. En la primera fila de un tablero 5×5 se colocan 5 fichas que tienen una cara blanca y otra negra, mostrando todas la cara blanca. Cada ficha se puede mover de una casilla a cualquiera de las contiguas (horizontal o verticalmente) dándole la vuelta en cada movimiento. Además, varias fichas pueden ocupar una misma casilla. ¿Se puede conseguir mediante una secuencia de movimientos que las 5 fichas queden en la última fila, en casillas distintas y que todas ellas muestren la cara negra?

2. Cada 20 minutos durante una semana se travasa una cantidad exacta de litros de agua (siempre la misma cantidad) desde un tanque con 25000 litros a otro depósito inicialmente vacío. Desde este segundo depósito, a intervalos regulares de tiempo, se extrae primero 1 litro, luego 2, luego 3, etc. Justo al final de la semana coinciden el último travase y la última extracción, quedando en ese momento vacío el segundo depósito. Determinar cuánta agua se ha extraído en total durante la semana, en caso de que los datos del problema lo permitan. (Se supone que los trasvases y las extracciones se realizan instantáneamente. El primer trasvase se hace pasados los primeros 20 minutos y la primera extracción, pasado el primer intervalo de tiempo.)

3. Sea $n \geq 1$ y $P(x)$ un polinomio con coeficientes enteros que cumple que los números $P(1), P(2), \ldots, P(n)$ son $1, 2, \ldots, n$ (no necesariamente en este orden). Demostrar que uno de los números $P(0)$ o $P(n+1)$ es múltiplo de $n!$.

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.

LII Olimpiada Matemática Española

Primera Fase

Segunda sesión

<u>Sábado mañana, 16 de enero de 2016</u>

4. Para pertenecer a un club cada nuevo socio debe pagar como cuota de inscripción a cada miembro del club la misma cantidad que él tuvo que pagar en total cuando ingresó más un euro. Si el primer socio pagó un euro, ¿cuanto deberá pagar en total el n-ésimo socio?

5. Dos circunferencias C y C' son secantes en dos puntos P y Q. La recta que une los centros corta a C en R y a C' en R', la que une P y R' corta a C en $X \neq P$ y la que une P y R corta a C' en $X' \neq P$. Si los tres puntos X, Q, X' están alineados se pide:

i) Hallar el ángulo $\angle XPX'$.

ii) Demostrar que $(d+r-r')(d-r+r') = rr'$, donde d es la distancia entre los centros de las circunferencias y r y r' sus radios.

6. Encontrar cuántas soluciones enteras tiene la ecuación

$$|5 - x_1 - x_2| + |5 + x_1 - x_2| + |5 + x_2 + x_3| + |5 + x_2 - x_3| = 20$$

No está permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntúa sobre 7 puntos.
El tiempo de cada sesión es de 3 horas y media.